|  |  |
| --- | --- |
| Логотип университета серый | МЧС РОССИИ |
| Санкт-Петербургский университет  Государственнойпротивопожарной службы |
| Учебно-методический комплекс |
| СМК-УМК-4.4.2-37-15 | Управление документацией |

УТВЕРЖДАЮ

Начальник кафедры САиАУ

полковник внутренней службы

В.А.Онов

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20 года

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**«ТЕОРИЯ ИГР»**

**для обучающихся по заочной форме обучения**

**по специальности 080100.62 «ЭКОНОМИКА»**

Обсуждена на заседании кафедры

Протокол №\_\_\_ от «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_г.

Санкт-Петербург

2015

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ***Должность*** | ***Фамилия/ Подпись*** | ***Дата*** |
| ***Разработал*** | *Профессор кафедры* | *Антюхов В.И./* |  |
| ***Проверил*** | *Начальник кафедры* | *Онов В А./* |  |
|  |  | | *Стр. 1 из 31* |

**Цели выполнения контрольной работы**

В качестве общей цели выполненияконтрольной работы «Решение задач математического программирования и игровых задач» выступает обучение слушателей практическому применению знаний по материалу дисциплины «Теория игр».

**Организация выполнения контрольной работы**

Начало выполнения контрольной работы планируется после проведения занятий на установочном сборе. Календарный период её выполнения для слушателей, обучающихся по заочной форме – во время межсессионной работы. Рубежный срок сдачи контрольной работы - не позднее, чем за неделю до зачета по дисциплине. Список слушателей, не сдавших контрольную работу к указанному сроку, подается в институт заочного и дистанционного обучения (ИЗДО).

Каждому слушателю выдается ***вариант темы контрольной работы в соответствии с его порядковым номером в классном журнале***. Номера вариантов и темы контрольных работ представлены ниже.

Результаты выполнения контрольной работы оформляются в виде отчета и представляются преподавателю установленным порядком через факультет заочного обучения. По результатам проверки выставляется оценка по двухбалльной шкале (**зачтено** - **не зачтено**). Получение оценки **не зачтено** ведет к выполнению новой работы или переработке прежней в сроки, определяемые начальником кафедры по согласованию с начальником факультета.

**Оценка контрольной работы**

*Критерии оценки* контрольной работы следующие:

**зачтено** - работа выполнена в соответствии с заданием в полном объеме, практическая часть реализована слушателем самостоятельно, ответы на вопросы по существу материала содержательные;

**не зачтено** - работа не соответствует заданию, представленные материалы не позволяют судить о законченности работы, слушатель слабо ориентируется в собственных результатах, ответы на вопросы отличаются неточностью.

**Оформление контрольной работы**

Отчет о выполнении контрольной работы готовится с использованием средств автоматизации подготовки документов (текстового редактора) и представляется преподавателю в соответствии со следующими требованиями.

Текст размещается на одной стороне листа бумаги формата А4 (297×210 мм). Размеры полей: слева - 25 мм, справа - 10 мм, сверху - 15 мм, снизу - 20 мм. Абзацный отступ - 15 мм. Шрифт выбирается произвольно, близким к машинописному, размер 12-14 пт. Строки абзаца формируются через 1,5 интервала.

Отчет делится на разделы. Каждый раздел начинается с новой страницы. Разделы, обозначаются арабскими цифрами с точкой. Точка в конце заголовка раздела не ставится, подчеркивание не допускается.

На титульном листе указываются:

- наименование учебного заведения с указанием принадлежности к министерству;

- наименование кафедры;

- текст «Контрольная работа по учебной дисциплине ТЕОРИЯ ИГР»;

- номер варианта и наименование контрольной работы;

- сведения о слушателе, такие как: специальное звание, фамилия, инициалы, учебная группа, номер зачетной книжки;

- город, где находится учебное заведение и год выполнения работы.

Все листы отчета, в том числе и титульный лист, нумеруются сквозной нумерацией арабскими цифрами. На титульном листе номер не ставят, на последующих листах он указывается в правом верхнем углу. Все листы отчета сшиваются. Использование канцелярских скрепок не разрешается.

Законченный отчет подписывается слушателем.

## *5. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ОТЧЕТА ПО КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ*

*Образец оформления титульного листа*

МЧС России

Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы

Кафедра системного анализа и антикризисного управления

**Контрольная работа по дисциплине**

**ТЕОРИЯ ИГР**

Вариант № (тема)

Слушатель 4 курса 254 уч. гр. ИДО

Лейтенант вн. сл. ПЕТРОВ В.А.,

Проверил: Ф.И.О. преподавателя

Санкт-Петербург

2015

## *5.1. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ*

Слушатели (студенты) выполняют вариант контрольной работы, соответствующий номеру слушателя (студента) по классному журналу.

**Вариант 1.**

Найти решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

-5 8

4 -7

**Вариант 2.**

*x*1, *x*2, *x*3, *x*4 ≥ 0

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

-1 1 -1 2

0 -1 2 -2

**Вариант 3.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

-1 1 -1 2

0 -1 2 -2

**Вариант 4.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

1 -1 2 -1

-1 2 -2 0

**Вариант 5.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

-1 2 -1 1

2 -2 0 -1

**Вариант 6.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

-2 0 -1 2

2 -1 1 2

**Вариант 7.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

-1 2 -1 1

0 -1 2 -2

**Вариант 8.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

4 2 3 -1

-4 0 -2 2

**Вариант 9.**

Найти приближённое решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

1 0 -1

1 -1 2

0 2 -4

**Вариант 10.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

2 3 -1 4

0 -2 2 -4

**Вариант 11.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

-1 4 2 3

2 -4 0 -2

**Вариант 12.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

-2 2 -4 0

3 -1 4 2

**Вариант 13.**

Найти решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

1 4

3 -2

0 5

**Вариант 14.**

Найти приближённое решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

4 -2 0

0 1 2

-3 3 -1

**Вариант 15.**

Найти решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

3 -2

0 5

1 4

**Вариант 16.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

2 -4 0 -2

-1 4 2 3

**Вариант 17.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

0 -2 2 -4

2 3 -1 4

**Вариант 18.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

3 -1 4 2

-2 2 -4 0

**Вариант 19.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

-4 0 -2 2

4 2 3 -1

**Вариант 20.**

Найти решение игры графическим методом и провести анализ полученного результата для следующей матричной игры:

0 -1 2 -2

-1 1 -1 2

**Вариант 21.**

Найти решение и провести анализ полученного решения для следующей матричной игры:

8 -5

-7 4

**5.2. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

**5.2.1. Решение игровой задачи**

5.2.1.1. *Вариант игровой задачи* 2 х 2.

Пусть задана конечная игра 2 х 2 с платёжной матрицей вида:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Ai \ Bj* | *B*1 | *B*2 |
| *A*1 | -3 | 5 |
| *A*2 | 6 | -2 |

*Требуется:*

Найти решение игровой задачи.

*Решение*.

В рассматриваемой игре необходимо рассмотреть два случая:

1. Игра имеет седловую точку, следовательно решение может быть сразу найдено.

2. Седловая точка в игре отсутствует, следовательно решение необходимо искать в смешанных стратегиях.

*Случай* 1.

Найдём нижнюю и верхнюю цены игры.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Ai \ Bj* | *B*1 | *B*2 | *α* |
| *A*1 | -3 | 5 | -3 |
| *A*2 | 6 | -2 | -2 |
| *β* | 6 | 5 |  |

Видно, что седловой точки нет, следовательно решение необходимо искать в смешанных стратегиях, т.е рассмотреть случай 2.

*Случай* 2.

Найдём решение, т.е. пару оптимальных стратегий:

SA\* = (*p*1, *p*2); SB\* = (*q*1, *q*2).

Определим вначале оптимальную смешанную стратегию SA\*. Согласно теореме об активных стратегиях, если будем придерживаться этой стратегии, то, независимо от действий стороны*В* (если сторона *В* не выходит за пределы своих активных стратегий), выигрыш будет оставаться равным цене игры *ν*.

В рассматриваемой игре обе стратегии стороны*В* являются активными (иначе игра имела бы седловую точку). Следовательно, если сторона*А* придерживается своей оптимальной стратегии SA\* = (*p*1, *p*2), то сторона *В* может, не меняя выигрыша, применять любую из своих чистых стратегий.

Отсюда имеем два уравнения:

*a*11*p*1 + *a*21*p*2 = *ν*;

*a*12*p*1 + *a*22*p*2 = *ν.*

Принимая во внимание, что *p*1 + *p*2 = 1, получаем из уравнений:

*p*1= (*a*22*- a*21) / (*a*11+ *a*22 - *a*12 - *a*21)

*p*2 = 1 - *p*1 = (*a*11 *- a*12) / (*a*11 + *a*22 - *a*12 - *a*21).

Для решаемой задачи, таким образом, имеем:

*p*1 = (-2 – 6) / (-3 + (-2) – 5 – 6) = -8 / -16 = 0.5;

*p*2= 1 - *p*1 = 1 – 0.5 = 0.5

Цену игры *ν*найдём, подставляя значения *p*1 и*p*2 в любое из выше представленных уравнений:

*ν*= (*a*22*a*11- *a*12*a*21) / (*a*11+ *a*22 - *a*12 - *a*21)

Длярешаемойзадачиимеем:

*ν* =[(-2)\*(-3) – 5 \* 6] / [(-3) + (-2) – 5 - 6] = (-24) / (-16) = 1.5

Аналогичным образом находится стратегия стороны В, т.е.:

SB\* = (*q*1, *q*2).

Из уравнений:

*a*11*q*1 + *a*12*q*2 = *ν*;

*a*21*q*1 + *a*22*p*2 = *ν;*

*q*1= (*a*22-*a*12) / (*a*11+ *a*22 - *a*12 - *a*21);

*q*2 = 1 - *q*1.

Получаем:

*q*1=[(-2) - 5] / [(-3) + (-2) – 5 - 6] = (-7) / (-16) = 0.44

*q*2 = 1 - *q*1= 1 – 0.44 = 0.66

В результате решения задачи получен следующий результат:

*p*1 = 0.5; *p*2 = 0.5; *ν* = 1.5; *q*1 = 0.44; *q*2 = 0.66;

SA\* = (0.5,0.5); SB\* = (0.44, 0.66).

После выполнения задания рекомендуется самостоятельно сделать вывод по полученным результатам.

5.2.1.2. *Вариант игровой задачи* 2 х *n*.

Найти решение игры графическим методом, если для неё задана следующая платёжная матрица:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i \j* | *B*1 | *B*2 | *B*3 | *B*4 | *B*5 | *B*6 |
| *A*1 | 6 | 4 | 3 | 1 | -1 | 0 |
| *A*2 | -2 | -1 | 1 | 0 | 5 | 4 |

Решим задачу по шагам.

*Шаг* 1. Анализ игры на наличие седловой точки:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i \j* | *B*1 | *B*2 | *B*3 | *B*4 | *B*5 | *B*6 | *α* |
| *A*1 | 6 | 4 | 3 | 1 | -1 | 0 | **-1** |
| *A*2 | -2 | -1 | 1 | 0 | 5 | 4 | -2 |
| *β* | 6 | 4 | 3 | **1** | 5 | 4 |  |

Нижняя цена игры равна -1, а верхняя - равна 1. Седловой точки нет. Следовательно решение игры нужно искать в смешанных стратегиях.

*Шаг* 2. Вычисление средних выигрышей игрока *А*. Это вычисление проводится при условии, что игрок *В* выбирает только чистые стратегии.

Средние выигрыши игрока А вследствие того, что:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *i \j* | *B*1 | *B*2 | *B*3 | *B*4 | *B*5 | *B*6 |
| *p* | *A*1 | 6 | 4 | 3 | 1 | -1 | 0 |
| *1-p* | *A*2 | -2 | -1 | 1 | 0 | 5 | 4 |

могут быть описаны уравнениями:

(1): *w* = 6*p* – 2(1 – *p*);

(2): *w* = 4*p* – (1 – *p*);

(3): *w* = 3*p* + (1 – *p*);

(4): *w* = *p*;

(5): *w* = - *p* + 5(1 – *p*);

(6): *w* = 4(1 – *p*).

*Шаг* 3. Построение нижней огибающей.

На координатной плоскости (*p, w*) строим по полученным уравнениям прямые и найдём нижнюю огибающую. Для этого каждому значению *p*, 0 ≤ *p* ≤1, путём визуального сравнения соответствующих ему значений *w*, определяем и отмечаем наименьшее из них. В результате выполнения этой процедуры получается ломаная, являющаяся графиком функции:



Получили нижнюю огибающую.

*Шаг* 4. Отыскание цены игры и оптимальной смешанной стратегии игрока *А*.

При построении нижней огибающей нетрудно определить, на пересечении каких двух из шести прямых лежит её наивысшая точка. В рассматриваемом случае это прямые (4) и (5), задаваемые уравнениями:

(4): *w* = *p*;

(5): *w* = - *p* + 5(1 – *p*).

Решая эту систему уравнений, получаем:

*pопт*= 5/7;

*wопт*= 5/7 (средний выигрыш).

Отсюда можно сделать вывод:

- цена игры ν = 5/7;

- оптимальная стратегия *pопт* = {5/7; 2/7}.

Собственно этим и заканчивается решение игры для игрока*А*, поскольку его в первую очередь интересует отыскание собственной оптимальной стратегии и ожидаемого наилучшего гарантированного результата.

При решении матричной игры, решающий её обычно отождествляет себя с одним из игроков (как правило, это игрок *А*), считая другого своим противником. Это связано ещё и с тем, что в некоторых случаях основное внимание уделяется поиску оптимальных стратегий только игрока*А*, а стратегии противника могут вообще не интересовать исследователя.

Однако в целом ряде случаев оказывается важным знать оптимальные смешанные стратегии обоих игроков.

Рассмотрим, каким образом можно отыскать оптимальную смешанную стратегию игрока *В*.

Здесь в зависимости от формы нижней огибающей может представиться несколько случаев.

*Случай* 1.

Нижняя огибающая имеет ровно одну наивысшую точку (*pопт, wопт*).

а) Если *pопт* = 0 (оптимальная стратегия игрока *А* – чистая стратегия *A*2), то игроку *В* выгодно применить чистую стратегию, соответствующую прямой, проходящей через точку (0, *wопт*) и имеющей наибольший отрицательный наклон (см. рис. );

б) Если *pопт* = 1 (оптимальная стратегия игрока *А* – чистая стратегия *A*1), то оптимальной для игрока *В* является чистая стратегия, соответствующая прямой, проходящей через точку (1, *wопт*) и имеющей наименьший положительный наклон (см. рис. );

в) Если 0 <*pопт*< 1, то в наивысшей точке нижней огибающей пересекаются по меньшей мере две прямые, одна из которых (*k*-я) имеет положительный наклон, а другая (*l*-я) – отрицательный (см. рис. ), и оптимальная смешанная стратегия игрока*В* получается, если положить:

*qk = q, ql =* 1 *– q, qj = 0, j ≠ k, l*,

где *q* – решение уравнения *a*1*kq* + *a*1*l*(1 – *q*) = *a*2*kq* + *a*2*l*(1 – *q*).

*Случай* 2.

Нижняя огибающая содержит горизонтальный участок, соответствующий чистой стратегии *kопт* игрока *В*, которая и является оптимальной для него (см. рис. ).

Для рассматриваемого примера полное решение игры будет следующим (т.е. и с учётом нахождения оптимальной смешанной стратегии игрока В):

*Qопт*= {*q*1 *опт*,*q*2*опт*,*q*3*опт*,*q*4*опт*,*q*5*опт*,*q*6*опт*}.

Для этого поступают так:

1) полагают:

*q*1*опт*= 0,

*q*2*опт*= 0,

*q*3*опт*= 0,

*q*4*опт= q*,

*q*5*опт= 1 - q*,

*q*6*опт*= 0,

выделяя тем самым из шести чистых стратегий игрока*В* стратегии *B*4и*B*5, которые соответствуют прямым (4) и (5), определяющим наивысшую точку нижней огибающей;

2) приравнивают любой из двух средних выигрышей игрока*В* (игрок *А* выбирает только чистые стратегии), отвечающий предложенной смешанной стратегии

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **0** | **0** | **0** | ***q*** | **1 - *q*** | **0** |
| 6 | 4 | 3 | 1 | -1 | 0 |
| -2 | -1 | 1 | 0 | 5 | 4 |

к цене игры:

*q* – (1 – *q*) = 5/7, 5(1 – *q*) = 5/7;

3) получают в результате в обоих случаях, что: *qопт*= 6/7.

Полное решение игры имеет вид:

*pопт* {5/7, 2/7};

*Qопт*= {0, 0, 0, 6/7, 1/7, 0};

*ν* = 5/7.

Примеры решения задач контрольной работы рассматриваются также в ходе установочного сбора по дисциплине.

**РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:**

**Основная:**

1. Артамонов В.С. и др. Системный анализ и принятие решений: Учебник / Под общей редакцией В.С.Артамонова. – СПб.: Изд-во СПб УГПС МЧС РФ, 2009. -378 с.

2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учеб.пособие для студ. втузов. Е.С.Вентцель. – 4-е изд. стер. –М.: Высш. шк., 2007. – 208 с.

3. Исследование операций : учебное пособие для вузов / А. А. Васин, П. С. Краснощеков, В. В. Морозов. - М. : Академия, 2009. - 464 с.(Университетский учебник. Прикладная математика и информатика)

**б) Дополнительная литература:**

4. Прикладные задачи математического программирования : учебное пособие / А. А. Грешилов. - 2-е изд., доп. - М. : Логос, 2006. - 288 с. - (Новая университетская библиотека)

5. Математическое программирование : учебное пособие / В. Г. Карманов. - 5-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 264 с

Начальник кафедры системного анализа

и антикризисного управления

полковник внутренней службы В.А.Онов