ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.А.КОСТЫЧЕВА»

ФАКУЛЬТЕТ ЭКОНОМИКИ И МЕНЕДЖМЕНТА

КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ

Методические указания и задания

для письменных работ

по курсу

**Высшая математика**

для студентов заочной формы обучения

по направлению подготовки

35.03.01 Лесное дело (квалификация (степень) "бакалавр")

Рязань 2015 год.

**Винникова Л.Б**

**Ягодкина Е.И.**

Методические указания и задания для письменных работ по курсу «Высшая математика» для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки 35.03.01 Лесное дело (квалификация (степень) "бакалавр"). Рязань 2015.

Методические указания и задания для письменных работ содержат методические рекомендации по оформлению и выполнению работы, задания по вариантам, примеры выполнения заданий.

Работа подготовлена на кафедре “Информационные технологии в экономике”.

Составитель: Винникова Л.Б., Ягодкина Е.И.

Рецензенты: Шашкова И.Г., д.э.н., профессор кафедры "Информационные технологии в экономике"

Троицкий Е.И., к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика»

Утверждено на заседании методической комиссии факультета экономики и менеджмента

«29 июня 2015» протокол № \_\_\_11\_\_\_\_\_

Председатель методической комиссии Лучкова И.В.

***Общие методические указания***

С целью упорядочения изучения курса и для систематической и своевременной проверки (и самопроверки) качества усвоения материала студент обязан выполнить письменную (контрольную) работу.

Студент-заочник самостоятельно работает над учебным материалом, решает задачи, выполняет контрольные задания.

Методические указания и задания для письменных работ содержат рекомендации по оформлению и выполнению работы, контрольные задания, образцы решения задач.

Если в процессе изучения материала или при решении задач у студента возникнут трудности, то он может обратиться за консультацией к преподавателю кафедры.

Контрольную работу оформляют в отдельной тетради в клетку, на обложке должны быть написаны фамилия и инициалы студента, его шифр (номер зачётки). Задачи располагаются в порядке возрастания их номеров. Перед решением задачи следует переписать её условие. На каждой странице тетради нужно оставлять поля шириной 2-4 см для замечаний преподавателя. Решение задач следует излагать достаточно подробно, делая соответствующие ссылки на теорию с указанием необходимых теорем и формул.

Студент выполняет вариант письменной (контрольной) работы, совпадающий с последней цифрой его учебного шифра.

Выполненная работа доставляется лично на кафедру бизнес-информатики и прикладной математики, регистрируется и отдается на проверку преподавателю.

После рецензирования студент может забрать свою работу для изучения замечаний и подготовки к экзамену.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.А.КОСТЫЧЕВА»

*Кафедра бизнес-информатики и прикладной математики*

*Дисциплина «Высшая математика»*

*Курс \_\_\_\_\_*

*ПИСЬМЕННАЯ (КОНТРОЛЬНАЯ) РАБОТА*

*Вариант 1*

Работу выполнил студент – заочник

технологического факультета по направлению подготовки

35.03.01 Лесное дело,

Иванов Иван Иванович

Шифр 14653

Работу проверил:

*Рязань - 2015*

Таблица заданий:

|  |  |
| --- | --- |
| № варианта | Номера задач для письменных (контрольных) работ |
| 1 | 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 101, 111, 121, 131, 141 |
| 2 | 2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92, 102, 112, 122, 132, 142 |
| 3 | 3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 103, 113, 123, 133, 143 |
| 4 | 4, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94, 104, 114, 124, 134, 144 |
| 5 | 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 115, 125, 135, 145 |
| 6 | 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96, 106, 116, 126, 136, 146 |
| 7 | 7, 17 ,27 ,37 ,47, 57, 67, 77, 87, 97, 107, 117, 127, 137, 147 |
| 8 | 8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88, 98, 108, 118, 128, 138, 148 |
| 9 | 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99, 109, 119, 129, 139, 149 |
| 10 | 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 120, 130,150 |

***Задания письменных (контрольных) работ***

**В задачах 1-10 найти указанные пределы.**

1. а) ; б) ;

 в) ; г) ;

2. а) ; б) ;

 в) ; г) ;

 3. а)  ; б) ;

 в) ; г) ;

4.  а) ; б)  ;

 в ) tg2xctg4x; г);

5. a) ; б)

 в)  г)

6. а)  б) 

 в)  г) ;

7. a)  б) 

 в)  г) 

8. а)  б) 

 в)  г) 

9. а)  б) 

 в)  г) ;

10. а)  б) 

 в)  г) 

**В задачах 11-20 найти производные функций**.

11.



12.



13.



14.



15.



16.



17.



18.



19.

+ 

20.

а) e ; 

**В задачах 21-30 провести полное исследование функции и построить её график.**

21. ; 22. ; 23. ; 24. ; 25. ; 26. ; 27.  ; 28.  ; 29. ; 30. .

**Задачи 31-40 решить средствами дифференциального исчисления.**

31. Каковы радиус основания R и высота H открытого цилиндрического бака данного объёма V, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество листового металла?

32. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершённого сверху полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

33. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс

34. Найти наибольший объём цилиндра, полная поверхность которого равна S.

35. Найти наибольший объём конуса, образующая которого равна l.

36. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объёмом 32 мтак, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

37. Сумма двух положительных чисел равна a. Каковы эти числа, если сумма их кубов будет наименьшей?

38. Два коридора шириной 2,4 м и 1,6 м пересекаются под прямым углом. Определить наибольшую длину лестницы, которую можно перенести горизонтально из одного коридора в другой.

39. На параболе  найти точку, наименее удаленную от прямой 

40. Из всех прямоугольников, вписанных в круг радиуса *R*, найти тот который имеет наибольшую площадь.

 **Решить указанные неопределенные интегралы в задачах 41-50 и результаты интегрирования проверить дифференцированием.**

41. *a) б) *

42*. а) .*

43. *а) б)  в) *

 44. *a); б); в)*

45. *a)  б) в) *

46. *а) б) в) *

47. *а) б) в) *

48. *а)  б)  в) .* 49. *а); б)  в) .*

50. *а) ; б)  в) .*

**В задачах 51-60 вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж:**

51*. y=*.

52. .

53. .

54. .

55*. y =.*

56. 

57. 

58. 

59. 

60. 

**В задачах 61-70 найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка.**

61. 62. 

63. 64. 

65. . 66. .

67. . 68. .

69. . 70. .

**В задачах 71-80 найти общее решение линейного дифференциальных уравнений первого порядка.**

71. . 72. .

73. . 74. .

75.  76. 

77. . 78. .

79.. 80. .

**В задачах 81-90 найдите частное решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющие указанным начальным условиям.**

81..

82..

83.

84..

85..

86. 

87. 

88. 

89. 

90. 

**Задачи 91-100 решить, применяя теоремы сложения и умножения вероятностей.**

91. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7; для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что:1) только один из стрелков поразит цель; 2) только два стрелка поразят цель; 3) все три стрелка поразят цель.

92. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8; для второго и третьего орудия эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что: 1) только один снаряд поразит цель; 2) только два снаряда поразят цель; 3) все три снаряда поразят цель.

93. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,9. Найти вероятность того, что: 1) оба стрелка поразят мишень; 2) оба стрелка промахнутся; 3) только один стрелок поразит мишень; 4) хотя бы один из стрелков поразит мишень.

94. От аэровокзала отправились 2 автобуса – экспресса к трапам самолетов. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса в аэропорт равна 0,95. Найти вероятность того, что: 1) оба автобуса придут вовремя; 2) оба автобуса опоздают; 3) только один автобус прибудет вовремя; 4) хотя бы один автобус прибудет вовремя.

95. На участке две бригады. Вероятность выполнения плана первой бригадой равна 0,8; а вероятность выполнения плана второй 0,9. Требуется найти: 1) вероятность выполнения плана участком; 2) вероятность выполнения плана только одной бригадой участка; 3) вероятность выполнения плана хотя бы одной бригадой участка.

96. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент даст правильный ответ на первый вопрос равна 0,9; вероятность правильного ответа на второй вопрос равна 0,8; на третий вопрос равна 0,7. Найти вероятность того, что студент ответит: 1) на все три вопроса правильно; 2) хотя бы на два вопроса.

97. Передающее устройство, канал связи и принимающее устройство могут быть повреждены. Вероятности повреждения соответственно равны 0,5; 0,4; 0,6. Найти вероятность того, что: 1) будет повреждено хотя бы одно; 2) хотя бы одно не будет повреждено; 3) система будет работать.

98. Коэффициенты использования рабочего времени у двух комбайнов соответственно равны 0,8 и 0,6. Считая, что остановки в работе каждого комбайна возникают случайно и независимо друг от друга, определить относительное время: 1) совместной работы комбайнов; 2) работы только одного комбайна; 3) простоя обоих комбайнов.

99. Рабочий обслуживает три станка. Известно, что вероятность бесперебойной работы на протяжении одного часа после наладки равна для первого станка 0,9; для второго станка 0,8 и для третьего станка 0,7. Найти вероятность того, что за этот час: 1) лишь один станок откажет в работе и потребует вмешательства рабочего; 2) два станка потребуют вмешательства рабочего; 3) ни один станок не потребует вмешательства рабочего.

100. На ферме две бригады. Вероятность выполнения плана первой бригадой 0,7; второй 0,8. Найти вероятность: 1) выполнения плана фермой; 2) выполнение плана только одной бригадой; 3) выполнения плана хотя бы одной бригадой?

**Задачи 101-110 решить, применяя формулу полной вероятности или Байеса.**

101. В группе 6 отличников, 10 хорошистов и 9 троечников. На экзамене отличники могут получить оценку «4» с вероятностью 0,3; хорошисты с вероятностью 0,8; троечники – с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что студент, вызванный первым, получит оценку «4».

102. При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 4 группы. К зернам 1-й группы принадлежит 96%, ко второй 2%, к 3-й 1%, к 4-й 1% всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен для 1-й группы равна 0,5; 2-й группы 0,2; 3-й группы 0,18; 4-й группы 0,02. Найти вероятность того, что из взятого наугад зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

103. Брак в продукции завода вследствие дефекта А составляет 5%, причем среди забракованной продукции по признаку А в 10% случае встречается дефект В, а в продукции свободной от дефекта А, дефект В встречается в 1% случаев. Найти вероятность того, что дефект В не встретится во всей продукции.

104. Изделие проверяется на стандарт одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу равно 0,55; а ко второму 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет принято первым товароведом равно 0,9; а вторым 0,98. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие будет признано стандартным.

105. На сборку поступают детали с 2-х автоматов. Первый дает в среднем 0,2% брака, второй 0,1%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 2000 деталей, а со второго – 3000.

106. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложено 2 шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.

107. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъезжает машина. Найти вероятность того, что машина будет заправляться.

108. В вычислительной лаборатории имеются 6 новых и 4 старых машин. Вероятность того, что за выполнение некоторого расчета новая машина не выдаст ошибку равна 0,95; для старой машины эта вероятность равна 0,8. Студент проводит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что машина не выдаст ошибку.

109. Исследование больного вызвало предположение о возможности одного из 3-х заболеваний А1 А2 А3 с вероятностями: Р(А1)=5/12; Р(А2)=1/3; Р(А3)=1/4. Для уточнения диагноза был произведен некоторый анализ, который при первом заболевании дает положительный ответ с вероятностью 0,8; при втором – с вероятностью 3/8; при третьем – с вероятностью 1/6. Какова вероятность точного ответа.

110. В партии 600 лампочек: 200 штук изготовлены на 1-м заводе, 250 – на 2-м; 150 – на 3-м. Вероятность того, что лампочка окажется стандартной для 1-го завода, равна 0,97; для второго 0,91; для третьего 0,93. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется стандартной.

**В задачах 111-120 составить ряд, функцию распределения для рассматриваемой ДСВ. Найти числовые характеристики.**

111. Устройство состоит из 3-х независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить ряд и функцию распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Найти математическое ожидание и дисперсию. Вычислить вероятность того, что откажут не менее двух элементов. Проиллюстрировать геометрически.

112. В партии из шести деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить ряд и функцию распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти числовые характеристики. Вычислить вероятность того, что число стандартных деталей не меньше двух.

113. Выпущено 1000 билетов лотереи, причем разыгрываются: один выигрыш в 50 руб., 5 выигрышей по 25 руб., 10 выигрышей по 10 руб., 25 выигрышей по 5 руб. Составить ряд и функцию распределения стоимости выигрыша для владельца одного билета. Найти «справедливую» цену одного билета.

114. На поле 5 тракторов. Надежность (т.е. вероятность безотказной работы) каждого равна 0,8. Составить ряд и функцию распределения числа тракторов, работающих одновременно. Найти среднее число исправных тракторов. Вычислить вероятность того, что исправных тракторов больше 3. Показать графически.

115. В связке имеется 5 различных ключей, из которых только одним можно открыть дверь. Наудачу выбирается ключ и делается попытка открыть им дверь. Ключ, оказавшийся неподходящим больше не используется. Построить ряд и функцию распределения числа использованных ключей. Найти вероятность того, что: а) дверь будет открыта вторым ключом; б) будет использовано не меньше двух ключей. Показать графически.

116. Вероятность того, что из яйца выведется петушок, равна 0,6. В инкубатор заложили 6 яиц. Найти ряд и функцию распределения числа петушков, которые выведутся из этих 6 яиц. Вычислить вероятность того, что число петушков не меньше 5.

117. Имеется 5 семян редкого растения со всхожестью 60%. Семена высеян по очереди (каждое следующее высевается только в том случае, если предыдущее не взошло). Составить ряд и функцию распределения числа использованных семян. Найти вероятность того, что число использованных семян больше 1 и меньше 3. Проиллюстрировать графически. Найти среднее число использованных семян.

118. Производится последовательное испытание 5 приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд и функцию распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержки испытания для каждого из них равна 0,9. Найти вероятность того, что придется испытывать не менее 2 и не более 4 приборов.

119. При бросании трех игральных костей игрок выигрывает: 18 руб., если на всех костях выпадает по 6 очков; 1 руб. 40 коп., если на двух костях выпадает по 6 очков и по 20 коп., если на одной кости выпадает 6 очков. Какова должна быть ставка за участие в игре, чтобы игра была безобидной. Построить ряд и функцию распределения выигрыша.

120. Выпущено 10000 билетов денежной лотереи. Разыгрывается 2 выигрыша по 5000 рублей, 8 по 1000, 170 по 100 рублей, 350 по 50 рублей и 750 по 10 рублей. Составить ряд и функцию распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Вычислить «справедливую» цену одного билета.

**В задачах 121-130 предполагается, что проведен некоторый эксперимент, в результате которого получен набор данных.**

Требуется:

1. Построить вариационный ряд частот или относительных частот;
2. Изобразить геометрически вариационный ряд, построив гистограмму частот;
3. Вычислить точечные оценки параметров распределения;
4. Высказать гипотезу о виде закона распределения признака и применить критерий согласия хи-квадрат Пирсона на 5%-м уровне значимости;
5. Считая полученный набор данных генеральной совокупностью, сделать из этой совокупности выборку объема 10, для которой:

а) вычислить точечные оценки параметров распределения – выборочную среднюю арифметическую  и исправленную выборочную дисперсию , сравнить полученные значения с соответствующими характеристиками генеральной совокупности;

б) найти доверительный интервал для генеральной средней на уровне значимости =0,05 при неизвестной и известной дисперсии;

в) найти доверительный интервал для генеральной дисперсии.

121. Техническая длина стебля (см) у ста растений льна характеризуется таблицей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 90,1 | 109,9 | 99,1 | 100,1 | 115,3 | 68,0 | 70,4 | 72,3 | 73,0 | 70,1 |
| 76,2 | 82,2 | 80,0 | 68,4 | 69,4 | 74,4 | 72,2 | 69,4 | 80,0 | 59,2 |
| 79,9 | 81,4 | 84,0 | 108,2 | 83,3 | 81,7 | 99,4 | 98,0 | 102,2 | 101,7 |
| 45,5 | 59,1 | 60,1 | 63,3 | 78,2 | 87,0 | 94,7 | 91,5 | 88,2 | 90,1 |
| 72,4 | 68,5 | 80,7 | 81,2 | 84,4 | 77,0 | 79,8 | 81,6 | 84,3 | 50,2 |
| 70,7 | 67,0 | 100,4 | 103,4 | 69,0 | 72,4 | 74,4 | 66,1 | 67,3 | 52,0 |
| 79,1 | 78,0 | 83,9 | 92,2 | 93,2 | 81,3 | 82,0 | 86,4 | 89,1 | 93,5 |
| 77,0 | 76,1 | 88,1 | 89,7 | 94,1 | 82,0 | 80,1 | 81,0 | 77,0 | 80,0 |
| 92,1 | 91,5 | 76,7 | 79,0 | 73,5 | 84,4 | 79,7 | 84,0 | 79,6 | 84,1 |
| 89,4 | 85,4 | 93,1 | 90,0 | 79,0 | 83,0 | 91,0 | 87,2 | 80,3 | 54,7 |

122. Выработка продукции предприятиями в сравнении с предыдущей пятилеткой дается таблицей (в %):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 136 | 146 | 123 | 144 | 138 | 127 | 152 | 140 | 126 | 166 | 159 | 148 | 146 |
| 140 | 124 | 141 | 134 | 143 | 138 | 150 | 126 | 143 | 137 | 155 | 142 | 141 |
| 138 | 114 | 142 | 152 | 146 | 139 | 135 | 132 | 118 | 130 | 154 | 138 | 137 |
| 134 | 150 | 161 | 142 | 132 | 135 | 140 | 157 | 131 | 140 | 136 | 128 | 158 |
| 138 | 158 | 126 | 137 | 128 | 139 | 132 | 120 | 143 | 134 | 145 | 133 | 141 |
| 133 | 145 | 131 | 145 | 139 |  |  |  |  |  |  |  |  |

123. Количество деталей, выработанных каждым из 100 рабочих в течение месяца:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 245 | 225 | 245 | 255 | 259 | 213 | 277 | 266 | 243 | 257 |
| 236 | 248 | 271 | 269 | 282 | 285 | 263 | 239 | 253 | 274 |
| 222 | 259 | 262 | 234 | 292 | 268 | 254 | 202 | 238 | 231 |
| 228 | 257 | 242 | 251 | 226 | 236 | 235 | 265 | 265 | 246 |
| 217 | 265 | 252 | 216 | 279 | 261 | 266 | 251 | 241 | 254 |
| 269 | 269 | 273 | 246 | 245 | 242 | 295 | 266 | 279 | 255 |
| 232 | 263 | 248 | 243 | 249 | 274 | 252 | 243 | 269 | 249 |
| 207 | 255 | 253 | 265 | 279 | 232 | 278 | 268 | 279 | 231 |
| 287 | 249 | 268 | 266 | 213 | 254 | 255 | 249 | 255 | 282 |
| 253 | 268 | 238 | 294 | 246 | 252 | 263 | 292 | 248 | 275 |

124. 100 сверл были подвергнуты испытанию на твердость. При этом фиксировалась твердость лапки. Результаты испытания представлены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 36,1 | 37,2 | 31,2 | 38,6 | 34,1 | 37,2 | 35,1 | 36,9 | 30,6 | 37,2 |
| 34,3 | 35,2 | 30,9 | 35,3 | 36,1 | 39,3 | 32,7 | 34,6 | 36,8 | 39,2 |
| 28,4 | 30,1 | 35,1 | 36,7 | 38,2 | 40,7 | 36,8 | 39,3 | 32,7 | 37,1 |
| 29,3 | 28,3 | 40,3 | 34,6 | 37,3 | 32,1 | 41,3 | 33,3 | 40,4 | 34,8 |
| 37,1 | 41,2 | 39,4 | 35,4 | 36,8 | 35,4 | 34,7 | 34,7 | 43,3 | 41,2 |
| 35,4 | 40,8 | 37,0 | 39,1 | 33,2 | 39,2 | 37,3 | 41,2 | 45,0 | 33,4 |
| 34,7 | 39,3 | 36,9 | 32,8 | 34,8 | 36,8 | 38,4 | 37,0 | 40,6 | 42,1 |
| 38,1 | 36,7 | 33,4 | 38,6 | 36,9 | 32,7 | 31,2 | 32,4 | 41,3 | 30,3 |
| 39,3 | 37,3 | 32,5 | 34,4 | 39,3 | 33,1 | 33,4 | 38,3 | 43,4 | 35,4 |
| 36,8 | 32,0 | 39,4 | 36,3 | 35,4 | 37,3 | 34,7 | 32,4 | 36,7 | 39,0 |

125. В институте 80 групп студентов (по 30 человек в каждой). Во всех группах проведена контрольная работа по математике. Сумма баллов, полученных каждой группой, дается в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 128 | 131 | 100 | 136 | 130 | 43 | 58 | 104 |
| 83 | 142 | 106 | 143 | 125 | 123 | 136 | 118 |
| 122 | 122 | 129 | 91 | 50 | 138 | 129 | 92 |
| 104 | 101 | 135 | 86 | 134 | 145 | 108 | 97 |
| 115 | 132 | 86 | 130 | 77 | 109 | 127 | 118 |
| 109 | 149 | 126 | 139 | 85 | 100 | 140 | 118 |
| 130 | 47 | 78 | 132 | 114 | 123 | 125 | 138 |
| 110 | 113 | 119 | 119 | 132 | 138 | 105 | 139 |
| 75 | 82 | 96 | 129 | 115 | 131 | 135 | 107 |
| 77 | 100 | 56 | 130 | 70 | 141 | 123 | 125 |
| 112 | 131 | 122 | 108 | 86 | 106 | 117 | 61 |

126. Выход валовой продукции на 1 га с.х. угодий в (руб.) дается следующей таблицей (для нескольких хозяйств):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 535 | 278 | 312 | 368 | 327 | 482 | 318 | 531 | 554 | 898 |
| 1030 | 390 | 334 | 423 | 393 | 1081 | 493 | 698 | 312 | 605 |
| 372 | 454 | 379 | 294 | 343 | 365 | 341 | 459 | 278 | 449 |
| 435 | 250 | 443 | 447 | 375 | 271 | 727 | 334 | 327 | 501 |
| 273 | 871 | 390 | 582 | 469 | 448 | 274 | 495 | 357 | 546 |
| 296 | 303 | 301 | 1070 | 473 | 713 | 666 | 357 | 625 | 588 |
| 596 | 312 | 279 | 351 | 373 | 389 | 333 | 260 | 386 | 1081 |
| 410 | 335 | 457 | 710 | 423 | 428 | 503 | 399 | 359 | 320 |
| 364 | 1031 | 396 | 315 | 479 | 284 | 333 | 344 | 610 | 381 |
| 294 | 414 | 313 | 549 | 289 | 686 | 325 | 662 |  |  |

127. Исследователь, изучающий выработку на одного рабочего в % к предыдущему году, получил данные:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 111 | 85 | 85 | 91 | 101 | 109 | 86 | 102 | 111 | 98 | 105 | 85 |
| 98 | 112 | 113 | 87 | 109 | 109 | 115 | 92 | 105 | 111 | 94 | 107 |
| 99 | 107 | 89 | 104 | 113 | 96 | 103 | 145 | 104 | 105 | 88 | 103 |
| 97 | 115 | 109 | 108 | 107 | 97 | 106 | 107 | 96 | 109 | 116 | 109 |
| 117 | 108 | 109 | 116 | 117 | 103 | 127 | 119 | 118 | 125 | 105 | 116 |
| 117 | 106 | 101 | 107 | 105 | 119 | 107 | 119 | 111 | 112 | 129 | 113 |
| 106 | 104 | 106 | 123 | 108 | 93 | 105 | 106 | 139 | 108 | 109 | 93 |
| 107 | 99 | 108 | 108 | 119 | 98 | 108 | 101 | 109 | 109 | 128 | 128 |
| 127 | 118 | 122 | 116 | 124 | 125 | 114 | 126 | 131 | 141 | 149 | 98 |

128. Имеются данные о дневном сборе клубники 50 работников (кг):

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16,1 | 17,3 | 18,4 | 19,1 | 16,8 | 18,7 | 21,3 | 16,4 |
| 15,3 | 16,4 | 18,0 | 17,4 | 18,0 | 17,0 | 18,4 | 20,2 |
| 17,3 | 18,9 | 18,6 | 20,9 | 20,3 | 18,0 | 17,4 | 15,6 |
| 19,1 | 21,9 | 15,7 | 17,6 | 16,1 | 17,5 | 18,3 | 19,0 |
| 17,2 | 19,9 | 17,5 | 19,2 | 19,7 | 16,6 | 18,3 | 19,3 |
| 17,4 | 18,0 | 19,8 | 15,6 | 22,0 | 20,9 | 17,4 | 20,7 |
| 18,7 | 17,2 |  |  |  |  |  |  |

129. Контрольные обмеры диаметра валиков дали следующие результаты – приведены два десятичных знака после запятой, целая часть равна 7мм:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 39 | 43 | 54 | 64 | 40 | 55 | 26 | 42 | 50 | 32 | 31 | 28 | 52 | 46 |
| 63 | 38 | 44 | 52 | 53 | 37 | 33 | 24 | 13 | 53 | 53 | 39 | 57 | 51 |
| 34 | 39 | 47 | 51 | 48 | 62 | 58 | 57 | 33 | 51 | 40 | 30 | 48 | 40 |
| 57 | 51 | 40 | 52 | 56 | 40 | 34 | 23 | 37 | 48 | 48 | 62 | 35 | 36 |
| 40 | 45 | 29 | 48 | 58 | 44 | 56 | 28 | 59 | 47 | 62 | 54 | 20 | 38 |
| 43 | 35 | 56 | 51 | 47 | 40 | 29 | 20 | 46 |  |  |  |  |  |

130. Контрольные обмеры диаметров шариков дали следующие результаты (указаны знаки после запятой) целая часть равна 5мм:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 61 | 55 | 69 | 55 | 67 | 59 | 67 | 55 | 66 | 57 | 80 | 68 | 72 | 53 |
| 74 | 42 | 62 | 42 | 72 | 64 | 60 | 69 | 43 | 60 | 65 | 68 | 39 | 50 |
| 66 | 63 | 62 | 46 | 70 | 82 | 68 | 65 | 61 | 54 | 48 | 58 | 62 | 59 |
| 58 | 45 | 63 | 57 | 74 | 50 | 62 | 57 | 66 | 59 | 76 | 60 | 52 | 41 |

**В задачах 131-140 по данным задачи надо реализовать схему однофакторного дисперсионного анализа.**

131. Имеются результаты конкурсного сортоиспытания озимой пшеницы (урожайность в ц/га). Изучить влияние сорта на урожайность. Уровень значимости =0,05.

|  |  |
| --- | --- |
| Сорт | Повторности |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Гибрид | 32,2 | 32,7 | 30,7 | 33,3 |
| Новоукраинка 84 | 35,2 | 35,2 | 32,2 | 33,8 |
| Безостая 4 | 45,7 | 44,2 | 43,7 | 44,0 |
| Скороспелка 3 | 42,5 | 54,5 | 35,7 | 53,7 |
| Приазовская | 36,8 | 37,0 | 38,0 | 37,8 |

132. На уровне значимости =0,05 исследовать влияние предшественника на урожайность озимой пшеницы Новоукраинка 84.

|  |  |
| --- | --- |
| Предшественник | Повторности |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Черный пар | 35,2 | 35,2 | 32,2 | 33,8 |
| Подсолнечник | 42,4 | 37,4 | 40,7 | 38,2 |
| Пласт трав | 32,4 | 33,3 | 34,8 | 34,6 |

133. На уровне значимости =0,05 исследовать влияние магазина на товарооборот за полгода (млн. руб., товары одного вида).

|  |  |
| --- | --- |
| Магазин | Месяц |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 19 | 23 | 26 | 18 | 20 | 20 |
| 2 | 20 | 20 | 32 | 27 | 40 | 24 |
| 3 | 16 | 15 | 18 | 26 | 19 | 17 |

134. На уровне значимости =0,05 исследовать влияние возраста на содержание иммуноглобулина в сыворотке крови (в мг %).

|  |  |
| --- | --- |
| Возрастная группа | Повторности |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 84 | 85 | 85 | 86 |
| 2 | 86 | 87 | 87 | 87 |
| 3 | 89 | 90 | 90 | 91 |

135. На химическом заводе разработаны два новых варианта технологического процесса. Чтобы оценить, как изменится дневная производительность труда, завод в течение 5 дней работает по каждому варианту, включая существующий. Методом дисперсионного анализа на уровне значимости 0,01 исследовать влияние технологического процесса на дневную производительность завода (в условных единицах).

|  |  |
| --- | --- |
| Технологическая схема | День работы |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Существующая | 46 | 48 | 73 | 52 | 72 |
| Вариант 1 | 74 | 82 | 64 | 72 | 84 |
| Вариант 2 | 52 | 63 | 72 | 64 | 48 |

136. На заводе разработаны три варианта технологического процесса и в течение 5 дней завод работает по каждому процессу. На уровне значимости =0,01 исследовать влияние технологии на дневную производительность завода (в условных единицах).

|  |  |
| --- | --- |
| Технологический процесс | День работы |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Вариант 1 | 44 | 66 | 46 | 60 | 48 |
| Вариант 2 | 68 | 76 | 88 | 70 | 60 |
| Вариант 3 | 70 | 78 | 68 | 70 | 54 |

137. Из группы полевых транзисторов взяты три выборки: в начале месяца, в середине и в конце. Выяснить на уровне значимости =0,01 влияние срока изготовления на результаты измерения емкости (в пикафар.).

|  |  |
| --- | --- |
| Срок изготовления | Повторности |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Начало месяца | 2,8 | 3,2 | 2,9 | 3,5 | 3,3 |
| Середина месяца | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,7 |
| Конец месяца | 3,6 | 2,8 | 3,0 | 3,2 | 3,0 |

138. На уровне значимости =0,1 выяснить существенность влияния содержания катализатора на время химической реакции.

|  |  |
| --- | --- |
| Содержание катализатора | Номер эксперимента |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5% | 5,9 | 6,0 | 7,0 | 6,5 | 5,5 |
| 10% | 4,0 | 5,1 | 6,2 | 5,3 | 4,5 |
| 15% | 8,2 | 6,8 | 8,0 | 7,5 | 7,0 |

139. Однотипные втулки обрабатывают на трех станках. Методом дисперсионного анализа исследовать зависимость диаметра этих втулок от типа станка. Уровень значимости =0,05.

|  |  |
| --- | --- |
| Тип станка | Повторности |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 2,066 | 2,063 | 2,068 | 2,060 | 2,067 |
| 2 | 2,063 | 2,060 | 2,057 | 2,056 | 2,059 |
| 3 | 2,063 | 2,059 | 2,062 | 2,062 | 2,060 |

140. В таблице приведен вес (кг) поросят, родившихся в различных опоросах. Методом дисперсионного анализа исследовать зависимость веса от номера опороса. Уровень значимости =0,1.

|  |  |
| --- | --- |
| Номер опороса | Повторности |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 0,8 | 1,12 | 1,32 | 1,28 |
| 2 | 1,4 | 1,12 | 1,28 | 1,4 |
| 3 | 1,32 | 1,44 | 1,04 | 1,24 |
| 4 | 1,28 | 1,32 | 1,28 | 1,16 |

**В задачах 141-150 методом линейного корреляционного анализа исследовать зависимость результирующего признака Y от факторного признака X.**

141. Исследовать зависимость между количеством осадков в мае – августе Х (мм) и прибавкой урожая картофеля Y (ц/га)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 280 | 210 | 120 | 150 | 150 | 200 | 290 | 140 | 160 | 130 |
| Y | 154 | 140 | 43 | 64 | 68 | 200 | 180 | 85 | 100 | 51 |

142. Исследовать зависимость между длиной колоса озимой пшеницы Х (см) и числом зерен Y в колосе.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 8 | 8,5 | 7,5 | 8,5 | 8 | 6 | 9 | 7 | 8 | 9 |
| Y | 33 | 29 | 26 | 31 | 29 | 24 | 26 | 25 | 28 | 34 |

143. Исследовать зависимость между успехами в чтении и арифметики по данным таблицы, в которой представлены ряды оценок по тестам чтения и арифметики.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Чтение Х | 43 | 58 | 45 | 53 | 37 | 58 | 55 | 61 | 46 |
| Арифметика Y | 32 | 25 | 28 | 30 | 22 | 25 | 22 | 20 | 20 |

144. Исследовать зависимость выхода продукта Y (кг/час) от температуры реакции Х ( 0С) на некотором химическом производстве.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 51 | 32 | 80 | 73 | 64 | 45 | 83 | 44 | 93 |
| Y | 52,7 | 15,2 | 89,5 | 94,8 | 76 | 39,3 | 114,8 | 36,5 | 137,4 |

145. Исследовать зависимость издержек обращения Y (тыс. руб.) от величины розничного товарооборота магазинов Х (млн. руб.).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 0,48 | 0,51 | 0,53 | 0,54 | 0,57 | 0,59 | 0,62 | 0,64 | 0,65 | 0,66 |
| Y | 26 | 25 | 31 | 28 | 29 | 32 | 36 | 37 | 37 | 38 |

146. Исследовать зависимость выпуска продукции Y (тыс. руб.) от стоимости основных фондов Х (тыс. руб.).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 1295 | 1821 | 2109 | 2836 | 3454 | 4213 | 5192 | 5578 |
| Y | 1773 | 2614 | 2932 | 3310 | 4539 | 5931 | 6105 | 7243 |

147. Исследовать зависимость урожайности картофеля Y (ц/га) от уровня внесения органических удобрений Х (т/га).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 37 | 35 | 37 | 29 | 40 | 36 | 32 | 30 | 32 | 39 |
| Y | 205 | 194 | 192 | 190 | 188 | 185 | 182 | 180 | 175 | 175 |

148. Методом корреляционного анализа исследовать связь между средним доходом Х на семью (тыс. долларов) и разводов Y на 1000 жителей. Данные взяты в 9 штатах США.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 4,9 | 6,3 | 6,4 | 6,2 | 5,8 | 4,2 | 4,9 | 6,7 | 6,0 |
| Y | 1,2 | 1,1 | 0,4 | 2,4 | 2,7 | 1,2 | 1,5 | 3,1 | 1,9 |

149. Исследовать зависимость между производством Х (тыс. тонн) и ценой Y (дол.) вишни с 1960 по 1969г. (данные министерства сельского хозяйства США).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | 185 | 266 | 276 | 150 | 344 | 248 | 200 | 198 | 228 | 278 |
| Y | 227 | 217 | 163 | 345 | 154 | 165 | 299 | 325 | 294 | 188 |

150. В таблице указаны уровни добычи угля в Англии (млн. тонн). Методом корреляционного анализа для первых 10 лет построить прямую регрессии. Последние три года использовать для сравнения прогноза с фактическим уровнем добычи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год Х | 1958 | 59 | 60 | 61 | 52 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| Уровень добычи Y | 219 | 209 | 197 | 193 | 200 | 199 | 197 | 191 | 177 | 175 | 167 | 153 | 144 |

***Решение типовых примеров***

**Пример №1. (для задач 1-10).**

Вычислить пределы:



Решение. а) Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенному выражению вида .

Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на множитель  Такое сокращение здесь возможно, так как множительотличен от нуля при :



б)  выражение Дает неопределенность вида (). Для её устранения умножим и разделим это выражение на сопряженное ():



в) Обозначим Тогда  и  при  Применяя свойства пределов и формулу первого предела  имеем:



г) При  выражение является неопределенностью вида . Для устранения этой неопределенности представим основание степени в виде суммы 1 и бесконечно малой при величины и применим формулу второго замечательного предела:



Тогда имеем: 

Пусть . Тогда и  при  . Переходя к переменной , получим:

 .

**Пример №2. (для задач 11-20).**

Найдите производные функции:

а) ; б)y=(3arctg+1);

в) cos ()-3y+4x=0. 

Решение: а) Последовательно применяя правило дифференцирования сложной функции, правила и формула дифференцирования, имеем:



б) 

в) В данном случае функциональная зависимость задана в неявном виде. Для нахождения производной нужно продифференцировать по переменной x обе части уравнения, считая при этом y функцией от *х,* а затем полученное уравнение разрешить относительно : *-sin (xy)- 6+4=0,*

*-sin · *

* *

Из последнего уравнения находим :





**Пример №3. (для задач 21-30).**

Провести полное исследование функции  и построить ее график.

Решение. Исследование предлагается провести в несколько этапов, которые соответствующим образом озаглавим.

1. Нахождение области определения .

 В нашем случае для существования значений функции, необходимо чтобы *x≠0*, поэтому областью определения будет Д(y)=(-∞; 0)U(0; ∞).

1. Определение четности, нечетности функции.

Проверяем два условия: *f(-x)=f(x)* и *f(-x)=-f(x).*Если выполняется первое условие, то функция четна; если второе – нечетна; если не выполнится ни одно из условий, тогда функция будет особого вида(ни четной, ни нечетной). Исходная функция является нечетной, так как выполняется условие *f(-x)=* = ─ = ─ *f(x)*.

 3. Исследование на непрерывность, построение асимптот.

Начинаем с области определения функции: функция определена (следовательно, непрерывна) везде, кроме точки х=0. Исследуем характер разрыва в точке х=0.

.

 Таким образом, в точке х=0 функция терпит разрыв II рода с бесконечным скачком, а прямая х=0 (т.е. ось OY) является вертикальной асимптотой графика функции.

 Найдем наклонные (в частном случае горизонтальные) асимптоты. Известно, что уравнение наклонных асимптот имеет вид , а после нахождения углового коэффициента  находим  В нашем случае получаем:



Следовательно, - наклонная асимптота.

4. Иссследование с помощью первой производной (возрастание, убывание, экстремум).

 Находим производную функции по формуле производной дроби:



Итак, Находим критические точки, т.е. точки, «подозрительные» на экстремум. Имеются два источника появления критических точек I рода: точки, в которых производная равна нулю, или не существует.



Итак, получили три критические точки I рода, которыми числовая прямая разбивается на интервалы, в каждом из которых производная имеет определенный знак. Удобно изобразить исследование с помощью первой производной на числовой прямой следующим образом:



Берем в каждом интервале любую точку и выясняем знак производной (ставим соответственно + или -).

На интервалах  производная , следовательно, функция возрастает (стрелки направлены вверх); соответственно, на интервалах (-1,0) и (0,1) , следовательно функция убывает.

Этот схематический рисунок удобен тем, что стрелки как бы намечают траекторию графика функции (см. график в конце примера). Кроме этого, он наглядно иллюстрирует достаточный признак экстремума функции в точке: если при переходе через критическую точку производная меняет знак, то в этой точке экстремум есть, причем, если знак меняется с «+» на «-», то имеется максимум, если с «-» на «+», то минимум. Глядя на рисунок, это легко понять: при х=-1 функция имеет максимум, при х=1 – минимум. Найдем  Итак, точки А1(-1,-2) и А2(1,2) – точки максимума и минимума графика функции.

Замечание: Разумеется, точка х=0 никак не может быть точкой экстремума, поскольку в этой точке функция терпит разрыв. Однако, для нахождения интервалов возрастания и убывания она необходима и потому её тоже считаем критической. То же замечание относится и к исследованию с помощью .

3. Исследование функции с помощью второй производной (выпуклость, вогнутость, перегиб).

Исследование функции на выпуклость, вогнутость и перегиб с помощью второй производной проводится по той же схеме, по которой с помощью первой производной проводится исследование функции на убывание, возрастание и экстремум.



Имеются два источника критических точек II рода, «подозрительных» на перегиб: не существует. В нашем примере  не существует при х=0. Вновь строим аналогичный чертеж:



На интервале , следовательно, функция  - выпуклая; на интервале , следовательно функция вогнутая. Несмотря на то, что в точке х=0 выпуклость сменяется вогнутостью, эта точка не является точкой перегиба, поскольку в точке х=0 функция разрывна.

Теперь строим график функции на основании проведенного исследования.



**Пример №4. (для задач 31-40).**

Резервуар, имеющий форму открытого сверху прямоугольного параллелепипеда с квадратным дном, нужно вылудить внутри оловом. Каковы должны быть размеры резервуара при его ёмкости 108 л. Воды, чтобы затраты на его лужение были наименьшими?

Решение. Затраты на покрытие резервуара оловом будут наименьшими, если при данной вместимости его поверхность будет минимальной.

Обозначим через  - сторону основания, - высоту резервуара. Тогда площадь *S* его поверхности равна , а объём *V = * Отсюда *b=* и *S=+*

Полученное соотношение устанавливает зависимость между площадью поверхности резервуара *S* (функция) и стороной основания *а* (аргумент). Исследуем функцию *S,* на экстремум. Найдём первую производную *S* ,приравняем её к нулю и решим полученное уравнение.

*S=2a-==0*

Отсюда *a=6.*  при *a>6,*  при *a<6.* Следовательно, при *a=6* функция *S* имеет минимум. Если *a=6* ,то b=3.Таким образом, затраты на лужение резервуара ёмкостью 108 л будут наименьшим, если он имеет размеры *6дм6 дм 3дм.*

**Пример №5. (для задач 41-50).**

а); б); в).

Решение: Существуют два общих методов интегрирования: Метод замены и метод интегрирования по частям. Метод замены переменной схематично можно записать в виде следующее формулы: 

Метод интегрирования по частям определяется формулой:, где

;  - некоторые функции.

Когда и как применять каждую из формул рассмотрим на примерах:

а)  сводится к табличному, использовании метода замены переменной.



б)  нельзя решить методом замены. Под знаком интеграла присутствует две функции разной природы: . В таких случаях применяют другой способ: метод интегрирования по частям



в)  тоже решается методом интегрирования по частям:



**Пример №6. (для задач 51-60).**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями 



Решение. Площадь S фигуры, ограниченной сверху и снизу непрерывными линиями и пересекающимися в точках с абсциссами  иопределяется по формуле





Для нахождения точек пересечения данных линий решаем системы уравнений



откуда 

Применяя формулу (1), получим:



**Пример № 7. (для задач 61-70).**

Найти общее решение ДУ первого порядка:

Решение: Данной ДУ является ДУ I-ого порядка с разделяющимися переменными

 : 

Преобразуем уравнение путём переноса *dx* в правую часть (добиваемся, чтобы переменные *x* и *y* находились в разных частях):



Проинтегрируем обе части:

, тогда

-общее решение данного уравнения.

**Пример № 8. (для задач 71-80).**

Решить уравнение 

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Для его решения (как и для линейного уравнения ) искомую функцию y представим в виде произведения двух других функций: *u=u(*) и *v=v(x),* то есть введём подстановку  Тогда y= и данное уравнение примет вид:

 cos x

Или

  (1)

Выберем функцию и так, чтобы

  (2)

При подобном выборе функции u уравнение (1) примет вид

  или  (3)

Решая (2) как уравнение с разделяющими переменными, имеем:

, , , .

Здесь произвольная постоянная C=0. Подставляя найденное значение  в уравнение (3), имеем:

, , , 

Тогда общее решение данного уравнения.

**Пример № 9. (для задач 81-90).**

Найти частное решение уравнения , удовлетворяющее начальным условиям , .

Решение. Общее решение  данного уравнения равно сумме о б щ е г о решения  о д н о р о д н о г о уравнения и какого-либо ч а с т н о г о решения  данного уравнения, то есть +.

 Для нахождения  составим х а р а к т е р и с т и ч е с к о е уравнение , имеющее комплексные корни и .В этом случае общее решение однородного уравнения ищем в виде

 +  (4)

где - комплексные корни характеристического уравнения. Подставив в (4) имеем:

 2x + 2x.

Для нахождения частного решения  неоднородного дифференциального уравнения воспользуемся следующей теоремой: если правая часть неоднородного уравнения есть функция *cossin x)* и числа  не являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение *(А cos sin* 

Применяя эту теорему при имеем:

 * cos 2x +sin 2x).*

Дважды дифференцируя последнее равенство, находим :

*cos 2x +(-4sin 2x.*

Подставив в данное уравнение и ,получим:

 *4B cos 2x-4A sin2x=4 sin 2x-8 cos 2x.*

Откуда *A=-1, B=-2.*

Следовательно,*2x+2sin 2x)* и 

 

Найдем :



Используя начальные условия, получим систему



**Пример № 10. (для задач 91-100).**

В результате опыта могут произойти три независимых события *А1, А2,* и *А3* с вероятностями *Р(А1)=0,9, Р(А2)=0,8, Р(А3)=0,1*. Найти вероятности того, что в результате опыта: 1) произойдут все три события; 2) произойдет хотя бы одно событие; 3) произойдет ровно одно событие; 4) произойдет только первое событие.

Решение. 1) Обозначим событие *В*=(в результате опыта произойдут все три события). Иначе говоря, в результате опыта произойдет *А1* *А2,* *А3*. Можно себя контролировать: если произносили союз «и», то речь идет о произведении событий: *В=А1А2А3*. Поскольку события независимые, то по теореме умножения вероятностей

*Р(В)=Р(А1А2А3)=Р(А1) Р(А2) Р(А3)=0,90,80,1=0,072; Р(В)=0,072.*

2) Обозначим событие С=(в результате опыта произойдет хотя бы одно из событий А1,А2, А3). Другими словами событие С означает, что в результате опыта произойдет или А1,  или А2,  или А3.Поскольку произносится союз или, то это указывает на то, что события складываются: *С=А1+А2+А3.* При этом необходимо учитывать, что здесь союз или произносится не совсем в обыденном употреблении, когда иногда применение союза или к А и В предполагает исключение одного из другого. В теории вероятностей сумма двух событий А+В означает: или А, или В, или оба. Поэтому теорема сложения вероятностей имеет вид: *Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(АВ),* а для трех событий

*Р(А1+А2+А3)=Р(А1)+Р(А2)+Р(А3)-Р(А1А2)-Р(А1А3)-Р(А2А3)+Р(А1А2А3).*

 Для нашего примера :

.

 Как видим, формула получилась громоздкой. В таких случаях следует всегда иметь в виду нахождение противоположного события и его вероятности. Противоположным событием  для *С* является: = (в результате опыта не произойдет ни одно из событий *А1, А2, А3*), т.е. =. Поскольку  то 

и видим, что тот же результат получен несколько проще.

1. Обозначим: Д=(в результате опыта произойдет ровно одно событие), т.е.

 Д= *А1+*+ . В этой сумме все слагаемые попарно не совместные, за счёт присутствия в каждом слагаемом противоположных событий. Поэтому 

1. Обозначим: Е=(в результате опыта произойдет только событие *А1*), т.е. *Е= А1*, следовательно, *Р(Е)=Р(А1)*=0,90,20,9=0,162.

**Пример № 11. (для задач 101-110).**

В коробке лежат неотличимые по внешнему виду два игральных кубика: один правильный, а второй неправильный, у которого шестерка выпадает с вероятностью  , пятерка – с вероятностью , а остальные – с одинаковыми вероятностями. Из коробки наудачу берут и подбрасывают кубики. Какова вероятность того, что выпадет шестерка?

Решение. Это пример на применение формулы полной вероятности, когда исследуемое событие А происходит одновременно с одним из событий (гипотез)  т.е. опыт разбивается на два этапа: сначала происходит одна из гипотез, а затем событие А. В нашем случае надо выбрать кубик, а затем подбросить его и ждать, появится или нет шестерка. Поэтому обозначим гипотезы: =(из коробки выбирается «правильный» кубик), =(из коробки выбирается «неправильный» кубик). Поскольку кубики неотличимы по внешнему виду, то . 

Условные вероятности даны в задаче:

вероятность события А, при условии, что событие (гипотеза) произошло, т.е. вероятность появиться шестерки, если выбран правильный кубик, равно . 

Аналогично,  Поэтому

 Видим, что полная вероятность находится между условными вероятностями, 

**Пример № 12. (для задач 111-120).**

Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Составить ряд и функцию распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах. Вычислить математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность того, что при четырех выстрелах будет не менее двух попаданий. Показать графически.

Решение. Во-первых, обозначим случайную величину(число попаданий в цель при четырех выстрелах). Очевидно, СВ  может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4. При вычислении соответствующих вероятностей ясно, что имеет место повторение опыта (один и тот же стрелок производит выстрел 4 раза), следовательно, должна применяться формула Бернулли , где - вероятность того, что в результате опытов событие (в нашей задаче – попадание в цель) появится ровно m раз, р – вероятность события в одном опыте (в нашей задаче р=0,8), q – вероятность противоположного события;

 

Проводим вычисления



Составим ряд распределения случайной величины (дискретной) :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| = | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 0,0016 | 0,0256 | 0,1536 | 0,4096 | 0,4096 |

Проверяем правильность вычисления:

.

Функцией распределения случайной величины  называется вероятность т.е. вероятность того, что СВ  примет значение меньше *x*: 

Для дискретных СВ функция распределения является дискретной (т.е. разрывной), разрывы функция терпит в точках . Действительно, проводим вычисления для нашей задачи: если  то событие невозможное Ǿ и, следовательно, =Ǿ)=0.

Далее, пусть 0<x<1. Тогда  Аналогично: пусть ,тогда 

Пусть  тогда 

Пусть  тогда  и, наконец, пусть  тогда 

 Построим график функции :



Стрелки на графике означают, что функция в точках разрыва указанного стрелкой значения не достигает. Например, (но не 0,4904), а 0,4904=

Вычислим числовые характеристики (математическое ожидание  и дисперсию ):

=

Дисперсию  можно вычислить по определению  или по формуле  По последней формуле имеем =

Среднее квадратичное отклонение 

 Итак, мы имеем два вида закона распределения дискретной случайной величины (ДСВ) – ряд распределения и функцию распределения пользуясь этими законами, найдем вероятность 

Во-первых, эту вероятность можно расписать следующим образом:  и, глядя на ряд распределения, получаем, что Этот же результат можно получить, используя функцию распределения, по формулам: 

Теперь, выбирая нужную формулу и глядя на функцию распределения, получим:



***Приложения.***

 ***Значения функции ***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | Ф(x) | x | Ф(x) | x | Ф(x) | x | Ф(x) |
| 0,000,010,020,030,040,050,060,070,080,090,100,110,120,130,140,150,160,170,180,190,200,210,220,230,240,250,260,270,280,290,300,310,320,330,340,350,360,370,380,39 | 0,00000,00400,00800,01200,01600,01990,02390,02790,03190,03590,03980,04380,04780,05170,05570,05960,06360,06750,07140,07530,07930,08320,08710,09100,09480,09870,10260,10640,11030,11410,11790,12170,12550,12930,13310,13680,14060,14430,14800,1517 | 0,400,4=10,420,430,440,450,460,470,480,490,500,510,520,530,540,550,560,570,580,590,600,610,620,630,640,650,660,670,680,690,700,710,720,730,740,750,760,770,780,79 | 0,15540,15910,16280,16640,17000,17360,17720,18080,18440,18790,19150,19500,19850,20190,20540,20880,21230,21570,21900,22240,22570,22910,23240,23570,23890,24220,24540,24860,25170,25490,25800,26110,26420,26730,27030,27340,27640,27940,28230,2852 | 0,800,810,820,830,840,850,860,870,880,890,900,910,920,930,940,950,960,970,980,991,001,011,021,031,041,051,061,071,081,091,101,111,121,131,141,151,161,171,181,19 | 0,28810,29100,29390,29670,29950,30230,30510,30780,31060,31330,31590,31860,32120,32380,32640,32890,33150,33400,33650,33890,34130,34380,34610,34850,35080,35310,35540,35770,35990,36210,36430,36650,36860,37080,37290,37490,37700,37900,38100,3830 | 1,201,211,221,231,241,251,261,271,281,291,301,311,321,331,341,351,361,371,381,391,401,411,421,431,441,451,461,471,481,491,501,511,521,531,541,551,561,571,581,59 | 0,38490,38690,38830,39070,39250,39440,39620,39800,39970,40150,40320,40490,40660,40820,40990,41150,41310,41770,41620,41770,41920,42070,42220,42360,42510,42650,42790,42920,43060,43190,43320,43450,43570,43700,43820,43940,44060,44180,44290,4441 |

***Приложение табл. 2.***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | Ф(х) | х | Ф(х) | х | Ф(х) | х | Ф(х) |
| 1,601,611,621,631,641,651,661,671,681,691,701,711,721,731,741,751,761,771,781,791,801,811,821,831,84 | 0,44520,44630,44740,44840,44950,45050,45150,45250,45350,45450,45540,45640,45730,45820,45910,45990,46080,46160,46250,46330,46410,46490,46560,46640,4671 | 1,851,861,871,881,891,901,911,921,931,941,951,961,971,981,992,002,022,042,062,082,102,122,142,162,19 | 0,46780,46860,46930,46990,47060,47130,47190,47260,47320,47380,47440,47500,47560,47610,47670,47720,47830,47930,48030,48120,48210,48300,48380,48460,4854 | 2,202,222,242,262,282,302,322,342,362,382,402,422,442,462,482,502,522,542,562,582,602,622,642,662,68 | 0,48610,48680,48750,48810,48870,48930,48980,49040,49090,49130,49180,49220,49270,49310,49340,49380,49410,49450,49480,49510,49530,49560,49590,49610,4963 | 2,702,722,742,762,782,802,822,842,862,882,902,922,942,962,983,003,203,403,603,804,004,505,00 | 0,49650,49670,49690,49710,49730,49740,49760,49770,49790,49800,49810,49820,49840,49850,49860,498650,499310,499660,4998410,4999280,4999680,4999970,499999970,5 |

**Литература**

 Основная литература

1. Гмурман, Владимир Ефимович**.** Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебник для прикладного бакалавриата / Гмурман, Владимир Ефимович. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2015. - 479 с. : ил. - (Бакалавр. Прикладной курс.).
2. Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебник для бакалавров / В.Н. Калинина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2015. – 472 с. – Режим доступа [http://www.biblio-online.ru/ (ЭБС](http://www.biblio-online.ru/%20%28%D0%AD%D0%91%D0%A1) «Юрайт»)
3. Шипачев, Виктор Семенович. Высшая математика. Базовый курс [Текст] : учебное пособие для бакалавров / Шипачев, Виктор Семенович ; под ред. А. Н. Тихонова. - 8-е изд. ; перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2013. - 447 с. - (Бакалавр. Базовый курс).
4. Шипачев, Виктор Семенович. Высшая математика: учебник и практикум для бакалавров [Электронный ресурс] / В.С. Шипачев ; под ред. А.Н. Тихонова. – 8-е., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2015. – 447 с. – Режим доступа <http://www.biblio-online.ru/> (ЭБС «Юрайт»)

**Д**ополнительная литература

1. Богомолов, Николай Васильевич. Математика [Текст] : учебник для бакалавров / Богомолов, Николай Васильевич, Самойленко, Петр Иванович. - 5-е изд. - М. : Юрайт, 2012. - 396 с. - (Бакалавр).
2. Богомолов, Николай Васильевич. Математика [Текст] : учебник для бакалавров / Богомолов, Николай Васильевич, Самойленко, Петр Иванович. - 5-е изд. ; перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. - (Бакалавр. Базовый курс). -
3. Виленкин, Игорь Владимирович. Высшая математика: интегралы по мере, дифференциальные уравнения, ряды [Текст] : учебное пособие / Виленкин, Игорь Владимирович, Гробер, Владимир Михайлович, Гробер, Олег Владимирович. - Ростов-на-Дону : Феникс, 2011. - 302 с. - (Высшее образование).
4. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для студентов высших учебных заведений по экономическим специальностям / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - 4-е изд. ; перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2012. - 909 с..
5. Гмурман, Владимир Ефимович. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие / Гмурман, Владимир Ефимович. - 12-е изд. ; перераб. и доп. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2011. - 479 с. : ил. - (Основы наук).
6. Гмурман, Владимир Ефимович. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие для бакалавров / Гмурман, Владимир Ефимович. - 12-е изд. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2012. - 479 с. : ил. - (Бакалавр).
7. Гмурман, Владимир Ефимович. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие для бакалавров / Гмурман, Владимир Ефимович. - 12-е изд. - М. : Юрайт , 2014. - 479 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс).
8. Горлач, Борис Алексеевич. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие / Горлач, Борис Алексеевич. - СПб. : Лань, 2013. - 320 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).
9. Дорофеева, Алла Владимировна. Высшая математика для гуманитарных направлений [Текст] : учебник для бакалавров / Дорофеева, Алла Владимировна. - 3-е изд. - М. : Юрайт, 2012. - 400 с. - (Бакалавр).
10. Ильин, Владимир Александрович. Высшая математика [Текст] : учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям 521600 "Экономика", 521500 "Менеджмент", 522200 "Статистика", 521000 "Психология", 521200 "Социология", 510600 "Биология", 510800 "География", 510500 "Химия", 511000 "Геология", 510700 "Почвоведение" / Ильин, Владимир Александрович, Куркина, Анна Владимировна. - 3-е изд ; перераб. и доп. - М. : Проспект, 2012.
11. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 1 [Электронный ресурс] : учебник для бакалавров / Л.Д. кудрявцев. – 6-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2015. – 703 с. – Режим доступа <http://www.biblio-online.ru> (ЭБС «Юрайт»)
12. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 2 [Электронный ресурс] : учебник для бакалавров / Л.Д. кудрявцев. – 6-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2014. – 720 с. – Режим доступа <http://www.biblio-online.ru> (ЭБС «Юрайт»)
13. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 3 [Электронный ресурс] : учебник для бакалавров / Л.Д. кудрявцев. – 6-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2014. – 351 с. – Режим доступа <http://www.biblio-online.ru> (ЭБС «Юрайт»)
14. Кузнецов, Олег Петрович. Дискретная математика для инженера [Текст] / Кузнецов, Олег Петрович. - 6-е изд. ; стереотип. - СПб. : Лань, 2014. - 400 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).
15. Кундышева, Елена Сергеевна. Математика [Текст] : учебник для экономистов / Кундышева, Елена Сергеевна. - 2-е изд. - М. : Дашков и К', 2011.
16. Павлюченко, Юрий Витальевич. Высшая математика для гуманитарных направлений [Текст] : учебное пособие для бакалавров / Павлюченко, Юрий Витальевич, Хассан, Нибаль Шамель, Михеев, Виктор Иванович. - 4-е изд. ; перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2013. - 238 с. - (Бакалавр. Базовый курс).
17. Попов, Александр Михайлович . Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник для бакалавров. Рекомендовано УМЦ "Профессиональный учебник" в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям экономики и управления / Попов, Александр Михайлович , Сотников, Валерий Николаевич. - М. : Юрайт, 2014. - 564 с. - (Бакалавр. Базовый курс).
18. Попов, Александр Михайлович. Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник для бакалавров. Рекомендовано УМЦ "Профессиональный учебник" в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям экономики и управления / Попов, Александр Михайлович , Сотников, Валерий Николаевич. - М. : Юрайт, 2012. - 564 с. - (Бакалавр).
19. Сайт компании Microsoft. Office /[Электронный ресурс]– Режим доступа /office.microsoft.com/ru-ru/
20. Сидняев, Николай Иванович. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебник для бакалавров для студентов высших учебных технических заведений / Сидняев, Николай Иванович. - М. : Юрайт, 2011. - 219 с. - (Бакалавр).
21. Статистика : учебник для бакалавров [Электронный ресурс] / под ред. В.С. Мхитаряна. – М.: Издательство Юрайт, 2015. – 590 с – Режим доступа <http://www.biblio-online.ru/> (ЭБС «Юрайт»)
22. Шипачев, Виктор Семенович. Высшая математика. Базовый курс [Текст] : учебное пособие для бакалавров / Шипачев, Виктор Семенович ; под ред. А.Н. Тихонова. - 8-е изд. ; перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2012. - 447 с. - (Бакалавр). - ISBN 978-5-9916-1609-6 : 379-00.