Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

Методические указания

к выполнению лабораторных работы по дисциплине
«ОСНОВЫ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ»
для студентов направления
151900 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»

Владимир2013

Методические указания, содержащие рекомендации по содержанию и выполнению лабораторных работ по дисциплине «Основы надежности технологических систем» для студентов направления 151900 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» ВлГУ.

Методические указания составлены на основе требований ФГОС ВПО и ООП направления 151900 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», рабочей программы дисциплины «Основы надежности технологических систем». В качестве рекомендации для организации эффективной работы студентов использованы методические пособия ведущих вузов России.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Целью выполнения лабораторных работ студентом является овладении навыками расчета основных показателей надежности элементов технологических систем с использованием ранее полученных теоретических знаний; формирование самостоятельности мышления, стремления к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Освоение дисциплины «Основы надежности технологических систем» направлено на развитие следующих компетенций:

Профессиональные:

– способностью проводить диагностику состояния и динамики производственных объектов машиностроительных производств с использованием необходимых методов и средств анализа (ПК-17);

– способностью участвовать в разработке математических и физических моделей процессов и объектов машиностроительных производств (ПК-18);

– способностью участвовать в разработке программ и методик испытаний машиностроительных изделий, средств технологического оснащения, автоматизации и управления (ПК-28);

– способностью выполнять работы по моделированию продукции и объектов машиностроительных производств с использованием стандартных пакетов и средств автоматизированного проектирования (ПК- 46);

– способностью выполнять работы по диагностике состояния и динамики объектов машиностроительных производств с использованием необходимых методов и средств анализа (ПК-47).

Целью выполнения лабораторных работ является закрепление теоретического материала по курсу «Основы надежности технологических систем», а так же построение индивидуальной образовательной траектории или работа над заданием в группе. По выполнении каждой лабораторной работы студент составляет отчет.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ, БАЗИРУЮЩИХСЯ НА АППАРАТЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Цель работы: Приобретение навыков компьютеризованных расчетов вероятностей случайных событий, а также определения числовых характеристик случайных величин.
2. Краткие теоретические сведения

2.1. Теория вероятностей как математическая основа теории надежности

Как известно, теория надежности технологических систем (ТС), в первую очередь, изучает поведение системы с точки зрения возможности появления внезапных или постепенных отказов. Отмеченные отказы представляют собой случайные события, что обуславливает широкое использование в данной области подходов и результатов теории вероятностей.

На практике инженерные расчеты надежности ТС предполагают выполнение операций над случайными событиями, вычисление их вероятностей применительно к различным ситуациям. Приведем ряд соотношений, вытекающих из теории вероятностей и применяемых при расчетах надежности ТС.

2.2. Вероятности композиций случайных событий

Правила выполнения операций, которым соответствуют вероятности результирующих событий, представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

Операция (искомая величина)	Условие	Соотношение
Вероятность события	A – случайное событие	$0 \le P(A) \le 1$
Вероятность суммы несовместных событий	События $A_1,\ldots A_2,\ldots A_n$ несовместны ($A_i A_j = \varnothing$, $i \ne j$)	$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
Сумма вероятностей полной группы попарно несовместных событий	U – достоверное событие $\sum^{n} A_i = U$, $A_i A_j = \varnothing$, $i \ne j$	$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(U) = 1$
Сумма вероятностей противоположных событий	A и $\bar{A}$ – противоположные события	$P(A) + P(\overline{A}) = 1$
Вероятность суммы совместных событий	События A и B совместны ($AB \ne \varnothing$)	$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
Вероятность произведения двух событий (общий случай)	$P(B\|A)$ – условная вероятность события B при наличии события A	$P(AB) = P(A) \cdot P(B\|A)$
Вероятность произведения независимых событий	$A_1,\ldots A_2,\ldots A_n$ – независимые события	$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

2.3. Случайные величины и их характеристики

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины (СВ). Закон (функция) распределения *F* для случайной величины *X* представляет вероятность Р того, что она примет значение, меньшее некоторой заданной величины *x*:

$$F(x) = P\{X < x\} \tag{1.1}$$

При этом различают два типа СВ: непрерывные и дискретные. Плотность распределения непрерывной СВ *X* в точке *x* определяется выражением:

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}F(x). \tag{1.2}$$

График плотности распределения *f(x)* называют кривой распределения.

Вероятность попадания СВ в интервал от α до β и функцию *F(x)* ее распределения при известной функции f(x) можно найти как

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx, \tag{1.3}$$

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \tag{1.4}$$

Отметим основные свойства плотности распределения:

$$f(x) \ge 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \tag{1.5}$$

Для описания свойств дискретной случайной величины обычно используется так называемый ряд распределения, который может быть представлен в виде таблицы значений вероятностей p_i того, что СВ *X* примет значения x_i ,

$i = \overline{1, n}$:

$$p_i = P\{X = x_i\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{1.6}$$

2.4. Числовые характеристики случайных величин

Во многих задачах определении показателей надежности ТС требуется найти отдельные числовые характеристики, указывающие на существенные черты распределения (например, математическое ожидание, дисперсию и т.д.). Такие числовые характеристики и расчетные формулы для их нахождения представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Характеристика	Тип случайной величины	
	Дискретная	Непрерывная
Математическое ожидание (МО) $M[X] = m_x$	$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$
Начальный момент s-го порядка $\alpha_s = M[X^s]$	$\alpha_s[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i$	$\alpha_s[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx$
Центральный момент порядка s $\mu_s[X]=M\left[\overset{0}{X}{}^s\right]$	$\mu_s[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^s p_i$	$\mu_s[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^s f(x)dx$
Дисперсия $D[X]=D_x=\mu_2[X]$	$D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i$	$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx$

Примечание:

$\overset{0}{X}=X-m_x$ - центрированная случайная величина,

$\sigma[X]=\sigma_x=\sqrt{D[X]}=\sqrt{D_x}$ - среднее квадратическое отклонение (СКО).

2.5. Наиболее применимые в теории надежности законы распределения случайных величин

Наиболее употребительными при решении задач оценивания надежности ТС являются экспоненциальный и нормальный законы распределения. При этом в качестве случайной величины чаще всего фигурирует наработка *T* системы до отказа, которая соответствует функции распределения *F(t)*. В некоторых ситуациях целесообразно оперировать функцией надежности, характеризующей вероятность противоположного отказу события:

$$P(t)=P\{T\geq t\}=1-F(t). \tag{1.7}$$

Функции и плотности распределения для вышеназванных законов распределения СВ представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Закон распределения	Выражения для функций		Параметр
	Функция распределения	Плотность распределения	
Экспоненциальный	$F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$	$f(t)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$	λ - интенсивность отказов
Нормальное распределение	$F(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\frac{-(x-m)^2}{(2\sigma^2)}}dx$	$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(t-m)^2}{(2\sigma^2)}}$	σ - СКО, m - МО

Для практических расчетов в случае нормального закона распределения применяют функцию Лапласа.

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\, dx , \quad (1.9)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} . \quad (1.10)$$

При этом производится переход от случайной величины T к величине, имеющей нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию:

$$Z = (T - m)/\sigma . \quad 1.11)$$

Функция φ (z) четная, т.е. φ (- z) = φ (z), и следовательно

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) . \quad (1.12)$$

Для значений функции Ф(z) составлены таблицы; она также является

встроенной функцией многих программных пакетов.

3. Задание

С использованием программ *MS Excel for Windows*, «MathCad» или «MatLab» найти решения следующих задач по вариантам.

Задача 1. Имеются 4 ящика, в которых находятся белые и черные шары (см. вариант задания): Из каждого ящика наугад вынимают по шару. Найти вероятность того, что все они будут одного цвета.

Варианты группового задания

№ варианта	№ ящика	Количество шаров	
		белых	черных
1	1	2	3
	2	3	1
	3	3	3
	4	2	3
2	1	3	2
	2	1	3
	3	4	2
	4	2	3
3	1	2	1
	2	1	2
	3	3	5

	4	2	2
4	1	4	3
	2	3	4
	3	2	3
	4	1	4
5	1	2	2
	2	3	3
	3	2	4
	4	4	2

Задача 2. Система состоит из 3-х блоков, причем 1-й может отказать с вероятностью 0.01, второй - с вероятностью 0.001, третий - с вероятностью 0.002. Перед вводом в эксплуатацию прибор проходит 2 вида испытаний.

При первом виде испытаний дефект 1-ого блока будет выявлен с вероятностью 0.7; второго - с вероятностью 0.5; третьего с вероятностью 0.4.

При втором виде испытаний дефект 1-го блока будет выявлен с вероятностью 0.9; второго - с вероятностью 0,2; третьего - с вероятностью 0.6.

Прибор считается исправным, если исправны все три блока.

Найти: 1) вероятность того, что неисправный прибор будет выпущен в эксплуатацию; 2) вероятность отказа прибора.

Задача 3. Дискретная случайная величина распределена по закону, заданному рядом приведенным в таблице. Найти: 1) математическое ожидание m_x;

2) дисперсию D_x.

Варианты группового задания

Закон распределения случайной величины X (p_i)

№ вар.	x_i											
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1	1,2	1,3	1,4	1,5
1	0,001	0,002	0,007	0,12	0,4	0,22	0,1	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01
2	0,002	0,01	0,005	0,14	0,3	0,15	0,2	0,08	0,05	0,02	0,03	0,1
3	0,012	0,2	0,05	0,003	0,5	0,25	0,12	0,06	0,005	0,07	0,025	0,3
4	0,02	0,004	0,3	0,014	0,4	0,32	0,12	0,05	0,35	0,08	0,045	0,4
5	0,005	0,002	0,055	0,16	0,48	0,07	0,23	0,005	0,65	0,07	0,005	0,07

4. Содержание отчета:

- Цель работы;
- Расчетные формулы для решения задач;

- Результаты расчетов.

5. Контрольные вопросы:

- ✓ Перечислите основные законы распределения отказов при расчётах надёжности.
- ✓ Определите области применимости законов распределения случайных величин, используемых в теории надёжности.
- ✓ Укажите, в каких случаях необходимо пользоваться усечённым нормальным распределением?
- ✓ Что такое случайная величина?
- ✓ Чему равна вероятность произведения двух событий (общий случай)?
- ✓ Перечислите типы случайных величин?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

1. Цель работы: Ознакомление с методикой и приобретение навыков расчета показателей надежности невосстанавливаемых систем (НС).

2. Краткие теоретические сведения

2.1. Наиболее применимые в теории надежности законы распределения случайных величин (продолжение)

Кроме тех законов распределения, которые были изучены в процессе выполнения лабораторной работы №1, в решении задач оценивания надежности ТС нашли себе применение усеченный нормальный закон распределения и распределение Вейбулла–Гнеденко. Функции и плотности распределения для вышеназванных законов представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Закон распределения	Выражения для функций		Параметры
	Функция распределения	Плотность распреде-	
Нормальное распределение (усеченный закон)	$F(t)=\begin{cases}0, t\le 0\\ \dfrac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\frac{-(x-m)^2}{(2\sigma^2)}}dx,\\ t>0\end{cases}$	$f(t)=\dfrac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(t-m)^2}{(2\sigma^2)}}$	σ , m
Распределение Вейбула–Гнеденко	$F(t)=1-e^{-\alpha t^k}$	$f(t)=\alpha k t^{k-1}e^{-\alpha t^k}$	α, k

Примечание: c - нормирующий коэффициент:

$$c = \sqrt{2\pi} \Big/ \int_{-m/\sigma}^{\infty} e^{-z^2/2} dz .$$

2.2. Вероятности отказа и безотказной работы НС

Статистическая оценка $\tilde{F}$ наработки НС до отказа при условии, что на испытания поставлено N идентичных систем, находящихся в одинаковых условиях, а испытания каждой системы доводятся до ее отказа, соответствует формуле

$$\tilde{F}(t) = N(t)/N , \tag{2.1}$$

где *N(t)* - число систем, отказавших к моменту времени *t*, т.е. на интервале (0, *t*), причем $\tilde{F}(0) = 0$, а при $t \to \infty$ величина $\tilde{F}(0) \to 1$.

Статистическая оценка $\tilde{Q}(t_1)$ вероятности отказа $Q(t_1)$ при фиксированном значении $t = t_1$:

$$\tilde{Q}(t_1) = N(t_1)/N . \tag{2.2}$$

Статистическая оценка $\tilde{P}(t_1)$ вероятности безотказной работы $P(t_1)$ НС на интервале $(0, t_1)$:

$$P(t_1) = 1 - \tilde{Q}(t_1) = \left[N - N(t_1)\right]/N . \tag{2.3}$$

2.3. Интенсивность отказов НС

Интенсивность отказов λ(t) невосстанавливаемой системы определяется как условная плотность вероятности ее отказа в момент *t* при условии, что до этого момента отказы не возникали:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[-\frac{1 - P(t,\, t+\Delta t)}{\Delta t}\right] = -\frac{dP(t)}{dt}\frac{1}{P(t)}. \tag{2.4}$$

Статистическая оценка $\tilde{\lambda}(t)$ интенсивности отказов определяется равенством:

$$\tilde{\lambda}(t) = \tilde{f}(t)/\tilde{P}(t) = \frac{N(t - \Delta t/2,\, t + \Delta t/2)}{\Delta t\left[N - N(t)\right]}, \tag{2.5}$$

где - $N(t - \Delta t/2,\, t + \Delta t/2)$ число систем, отказавших на интервале $(t - \Delta t/2,\, t + \Delta t/2);\ N - N(t)$ - число систем, работоспособных к моменту *t*.

2.4. Средняя наработка НС до отказа

К числу показателей надежности НС, являющихся числовыми характеристиками случайных величин, относится средняя наработка до отказа (среднее время безотказной работы) - математическое ожидание случайной величины *T* наработки до отказа (или времени безотказной работы). При этом:

$$\tau = \int_0^\infty p(t)\,dt\,. \qquad (2.6)$$

Статистическая оценка $\tilde{\tau}$ средней наработки τ до отказа

$$\tilde{\tau} = \sum_{i=1}^{N} t_i / N\,, \qquad (2.7)$$

где t_i - наработка до отказа i-й системы; N - число систем.

Отметим, что средняя наработка τ до отказа равна:

а) для случая экспоненциального закона распределения:

$$\tau = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt = 1/\lambda\,, \qquad (2.8)$$

б) для случая нормального распределения:

$$\tau = m \qquad (2.9)$$

в) для случая усеченного нормального распределения:

$$\tau = m + \sigma c_1\,, \qquad (2.10)$$

где $c_1 = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} e^{-m^2/(2\sigma^2)}$.

3. Задание

Используя программные средства найти решения следующих задач.

Задача 1. На испытания отправлено 50 образцов новой ТС. К моменту t_1 =10000 час. число отказавших систем - $N(t_1)$; к моменту t_2 =11000 час. - $N(t_2)$; к моменту t_3 =12 000 час. - $N(t_3)$.

Найти статистические оценки: 1) вероятности безотказной работы $P(t_i)$, i = 1,2,3;

2) вероятности отказа $Q(t)$, i = 1, 2, 3;

3) интенсивности отказов $\lambda(t_2)$.

Варианты группового задания

№ варианта	$N(t_1)$	$N(t_2)$	$N(t_3)$
1	3	4	6
2	5	7	12
3	2	5	14
4	6	13	22
5	11	17	34

Задача 2. Найти оценку $\tilde{\tau}$ средней наработки системы до отказа, если испытано 10

образцов этой системы (т.е. $N = 10$), и каждый i-й образец ($i = 1, 2,...,10$) проработал до отказа время t_i, указанное в таблице:

№ вар.	t_i, ч									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	12000	7200	10000	5000	11000	7000	7800	9100	9800	8000
2	5700	7000	8300	4800	11500	2300	8550	7250	8800	4000
3	6300	1200	7000	3800	4600	8000	7230	4600	10000	15000
4	7500	2800	8000	13000	7850	9000	7600	6200	11000	4560
5	5000	3000	4600	6800	9000	8000	1450	2380	6000	10000

Задача 3. Наработка системы до отказа подчиняется экспоненциальному закону $P(t) = e^{-\lambda \cdot t}$, с интенсивностью отказов $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$ 1/час.

Необходимо: 1) найти вероятность $Q(t_1)$ отказа системы к моменту времени $t_1 = 1200$ час; 2) найти среднюю наработку τ системы до отказа; 3) построить график функции $Q(t)$.

Задача 4. Наработка системы до отказа подчиняется нормальному закону, усеченному на интервале $(0 ; \infty)$ с параметрами распределения $m = 4000$ час, $\lambda = 1000$ час.

Необходимо: 1) найти вероятность безотказной работы для момента времени t_1=1200 час; 2) найти среднюю наработку τ системы до отказа; 3) построить график изменения вероятности безотказной работы в интервале от t_2 до t_3.

Варианты группового задания

№ варианта	t_1	$t_2 \div t_3$
1	1200	100-500
2	700	550-750
3	1000	220-410
4	1300	345-675
5	900	800-915

Задача 5. Наработка системы до отказа подчиняется распределению Вейбулла. При этом имеет место «участок приработки» на характеристике для интенсивности отказов. При заданных параметрах распределения α; k.

Найти вероятность $P(t)$ безотказной работы и интенсивность $\lambda(t)$ отказов системы при: $t = t_1$; и $t = t_2$.

Варианты группового задания

№ варианта	α	k	t_1	t_2
1	10^{-3}	0,5	100	500
2	10^{-3}	0,55	150	450
3	10^{-3}	0,6	200	520
4	10^{-3}	0,78	180	550
5	10^{-3}	0,62	160	400

4. Содержание отчета:

- Цель работы;
- Расчетные формулы для решения задач;
- Результаты расчетов, необходимые графики.

5. Контрольные вопросы:

- ✓ Что называется интенсивностью отказов невосстанавливаемой системы?
- ✓ Что называется средней наработкой до отказа?
- ✓ Чему равна средняя наработка до отказа для случая экспоненциального закона распределения?
- ✓ Чему равна средняя наработка до отказа для случая нормального распределения?
- ✓ Чему равна средняя наработка до отказа для случая усеченного нормального распределения?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

1. Цель работы: Ознакомление с методикой и приобретение навыков расчета показателей надежности восстанавливаемых систем (ВС).

2. Краткие теоретические сведения

2.1. Потоки отказов восстанавливаемых систем

После каждого отказа ВС следует ее восстановление, которое заключается в замене отказавшего элемента идентичным работоспособным или в проведении ремонтных операций. Так же, как и наработка до первого отказа невосстанавливаемой системы, моменты наступления отказов ВС являются случайными. Нередко случайной является и продолжительность работ по проведению восстановления.

Последовательность отказов, происходящих один за другим в случайные моменты времени, носит название потока отказов. Понятие потока отказов является одним из основных при рассмотрении систем с восстановлением.

Возможны два основных способа задания потока отказов. Первый способ заключается в рассмотрении некоторого дискретного случайного процесса $\eta(t)$ - числа отказов на промежутке времени $(0, t)$. Второй способ заключается в изучении последовательности непрерывных случайных наработок $\xi_1 = t_1$; $\xi_2 = t_2 - t_1$; $\xi_3 = t_3 - t_2$; … между отказами.

Введем некоторые дополнительные понятия. Ведущая функция потока определяется как математическое ожидание числа отказов за время t

$$W(t) = M[\eta(t)]. \tag{3.1}$$

Очевидно, что W(t) - неотрицательная неубывающая функция. Эта функция к тому же практически всегда дифференцируема, и существует величина которую называют параметром потока отказов.

$$\omega(t) = dW(t)/dt, \tag{3.2}$$

2.2. Показатели надежности восстанавливаемых систем

Показатели безотказности. В соответствии с двумя способами задания потока отказов для восстанавливаемых систем можно применять различные показатели безотказности. При задании потока отказов как дискретного случайного процесса $n(t)$ - числа отказов на интервале (0;t) показателем безотказности является параметр потока отказов ω(t), определяемый соотношением (3.2). Для статистического определения параметра потока отказов используются данные испытаний одинаковых ВС в одинаковых условиях эксплуатации и при одинаковом техническом обслуживании. В момент t = 0 все системы работоспособны и начинают работу. Обозначим $n_i(t)$ число отказов i-й системы $(i=\overline{1,N})$ на интервале $(0;t)$. Тогда

$$\tilde{\omega}(t) = \sum_{i=1}^{N}\left[n_i(t+\Delta t) - n_i(t)\right] / (N \cdot \Delta t). \tag{3.3}$$

Таким образом, параметр потока отказов характеризуется отношением числа отказов системы на некотором малом отрезке времени к значению этого отрезка.

При задании потока отказов как последовательности случайных величин ξ_1, ξ_2 ... наработок между отказами (в предположении, что эти наработки имеют одинаковое распределение с плотностью $f(t)$) показателем безотказности является средняя наработка на отказ

$$\theta = \mathrm{M}[\xi_i] = \int_0^\infty t\, f(t)\, dt, \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3.4}$$

Отметим, что в простейшем потоке средняя наработка на отказ θ и параметр потока ω связаны соотношением θ = 1/ω.

Для статистического определения средней наработки на отказ θ будем, как и выше, испытывать N одинаковых восстанавливаемых систем. Предположим, что каждая из них проработала в течение времени t. Тогда

$$\tilde{\theta} = N t \Big/ \sum_{i=1}^{N} n_i(t). \tag{3.5}$$

Показатели ремонтопригодности. На практике продолжительность восстановления почти всегда существенно меньше времени между отказами. Однако нельзя не учитывать продолжительность восстановления для решения многих задач надежности (например, расчета потерь из-за отказов, количества необходимого ремонтного персонала и др.).

Обозначим через $T_В$ случайную величину - продолжительность восстановления работоспособного состояния системы после отказа (далее сокращенно - время восстановления).

Показателями ремонтопригодности являются вероятность $G(t)$ восстановления работоспособного состояния за заданное время t_1 и среднее $\tau_В$ время восстановления соответственно:

$$G(t_1) = \mathrm{P}\{T_B < t_1\}; \;\; \tau_B = \mathrm{M}[T_B]. \tag{3.6}$$

Статистические определения этих показателей:

$$\tilde{G}(t_1) = l(t_1)/m; \;\; \tilde{\tau}_B = \sum_{i=1}^{m} \tau_{Bi}/m; \tag{3.7}$$

где $l(t_1)$ - число восстановлений, длительность которых меньше t_1; m - общее число восстановлений; τ_{Bi} - время восстановления после i-го отказа.

Комплексные показатели надежности. Комплексные показатели отражают совместно безотказность и ремонтопригодность.

Коэффициентом готовности $К_Г$ называют вероятность того, что система окажется работоспособной в произвольно выбранный момент времени в установившемся процессе эксплуатации. Можно показать, что в альтернирующем процессе восстановления коэффициент готовности

$$K_Г = \theta/(\theta + \tau_B). \tag{3.8}$$

Для статистического определения коэффициента готовности, как и в начале настоящего раздела, рассмотрим испытания N одинаковых восстанавливаемых систем и обозначим $N_P(t_x)$ число систем, находящихся в состоянии работоспособности в произвольный, достаточно удаленный от начала испытаний момент времени t, Тогда статистическое определение коэффициента готовности

$$\tilde{K}_Г = N_P(t)/N. \tag{3.9}$$

Коэффициентом оперативной готовности $К_{ОГ}(t)$ называют вероятность того, что система окажется работоспособной в произвольно выбранный момент времени в установившемся режиме эксплуатации и что, начиная с этого момента, система будет работать безотказно в течение заданного интервала времени t. Из этого определения и из (3.9) следует, что в альтернирующем процессе восстановления

$$K_{ОГ}(t) = \frac{\theta}{\theta + \tau_B} P(t_x, t), \tag{3.10}$$

где $P(t_x, t)$ - условная вероятность безотказной работы ВС на интервале $(t_x; t_x + t)$ при условии, что в момент t_x система была работоспособна.

При экспоненциальным законе для условной вероятности имеем:

$$K_{ОГ}(t) = \frac{\theta}{\theta + \tau_B} e^{-\lambda t}. \tag{3.11}$$

3. Задание

С использованием программы *MS Excel for Windows*, программного пакета «*MathCad*» или «*MatLab*» найти решения следующих задач.

Задача 1. Пусть для числа отказов $n_i(t)$ каждой из пяти систем, поставленных на испытания, имеют место следующие закономерности:

номер системы	число отказов	время t, час					
		50	100	150	200	250	300
1	$n_1(t)$	1	2	2	3	4	4
2	$n_2(t)$	2	3	3	3	4	5
3	$n_3(t)$	1	1	1	3	4	4
4	$n_4(t)$	2	3	4	4	5	5
5	$n_5(t)$	1	1	2	2	3	3

Системы полностью восстанавливаются после каждого отказа. Найти $\omega\ (t_1)$ и $\omega\ (t_2)$

Варианты группового задания

№ варианта	$\omega\ (t_1)$	$\omega\ (t_2)$
1	150	250
2	50	150
3	100	300
4	50	250
5	200	250

Задача 2. Четыре системы проработали 1000 часов. При этом: 1) в первой системе было $n_1(t)$ отказа; 2) во второй – $n_2(t)$ отказов; 3) в третьей – $n_3(t)$ отказов; 4) в четвертой $n_4(t)$ отказа. После каждого отказа системы полностью восстанавливались. Найти оценку $\tilde{\theta}$ средней наработки на отказ.

Варианты группового задания

№ варианта	$n_1(t)$	$n_2(t)$	$n_3(t)$	$n_4(t)$
1	3	0	5	2
2	0	4	3	1
3	2	2	5	4
4	1	4	0	5
5	2	2	2	4

Задача 3. В системе имели место 7 отказов. Время восстановления $t_{\text{в}i}$, =1, 2,...,7, после очередного отказа составило:

Варианты группового задания

№ вар.	время восстановления $t_{\text{в}i}$, час.						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1,5	6	2	2,5	3	3	2,5
2	2	5	4	5	5	1,5	1,5

3	6	6	2	2,5	4	1	2
4	1	2	3	5	6	2	1
5	4	5	5	3	3	4	5

Найти оценки:
1) вероятности того, что время восстановления не будет превышать $t_1 = 2$ час;
2) среднего времени $\tau_в$ восстановления.

Задача 4. Имеются 3 экземпляра системы, которые проработали 500 часов. График работы систем:

Номер системы	Данные об отказах и ремонтах систем	Номер отказа				
		1	2	3	4	5
1	Момент отказа, час.	100	155	300	390	-
	Время ремонта, час.	5	2	10	5	-
2	Момент отказа, час.	50	100	155	300	350
	Время ремонта, час.	10	5	5	5	10
3	Момент отказа, час.	150	300	455	-	-
	Время ремонта, час.	10	5	5	-	-

Знак "-" обозначает отсутствие отмеченного отказа. Найти коэффициент готовности $К_Г$.

Задача 5. Построить график изменения коэффициента оперативной готовности системы $К_{ОГ}(t)$ на интервале времени Δt =200 час, если: закон надежности - экспоненциальный, $\lambda = 10^{-4}$ час$^{-1}$; средняя наработка на отказ θ = 300 час; среднее время восстановления $\tau_в$ = 10,5 час. Построение графика производить, используя программные средства, интервал изменения t от 0 до 200 часов.

4. Содержание отчета:

- Цель работы;
- Расчетные формулы для решения задач;
- Результаты расчетов;
- Значения функции коэффициента готовности в отдельных точках и ее график.

5. контрольные вопросы:

- ✓ Что называется потоком отказов?
- ✓ Назовите два основных способа задания потоков отказов.
- ✓ Назовите комплексные показатели безотказности и ремонтопригодности, приведите их статистические оценки.
- ✓ Что называют коэффициентом готовности?
- ✓ Что называют коэффициентом оперативной готовности?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

1. Цель работы: Ознакомление с методикой и приобретение навыков расчета показателей надежности невосстанавливаемых систем (включая системы с резервированием).

2. Краткие теоретические сведения. Методы расчета надежности невосстанавливаемых систем

Выбор метода расчета надежности невосстанавливаемых систем зависит от структуры системы. Обычно различают две группы указанных систем: с простой структурой, сводящейся к последовательно-параллельному соединению элементов (в смысле надежности); со сложной структурой, не сводящейся к последовательно-параллельному соединению элементов (в смысле надежности).

2.1. Расчет надежности систем с простой структурой

Вероятность безотказной работы системы при основном (последовательном) соединении n элементов определяется выражением

$$P_c(t) = p_1(t)p_2(t)\dots p_n(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t), \tag{4.1}$$

где $p_i(t)$ - вероятность безотказной работы i-го элемента.

При параллельном соединении т элементов вероятность отказа системы будет равна

$$Q_c(t) = q_1(t)\, q_2(t) \dots q_m(t) = \prod_{j=1}^{m} q_j(t), \tag{4.2}$$

где $q_j(t) = 1 - p_j(t)$ - вероятность безотказной работы j-го элемента.

Если закон распределения времени безотказной работы элементов экспоненциальный, т.е. $p_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, то при основном соединении элементов выражение (4.1) примет следующий вид:

$$P_c(t) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} \dots e^{-\lambda_n t} = e^{-\lambda_C t}, \tag{4.3}$$

где $\lambda_c = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ - интенсивность отказов системы.

При параллельном соединении m элементов, имеющих экспоненциальный закон распределения времени безотказной работы, вероятность отказа всей группы элементов:

$$Q_{\text{P}}(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)\dots\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_m t}\right) = \prod_{j=1}^{m}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_j t}\right). \tag{4.4}$$

Влияние условий эксплуатации на величины показателей надежности учитывают при окончательном (коэффициентном) расчете. Такой учет обычно производится с помощью соотношения

$$\lambda = \lambda_{\text{ном}} k_1 k_2 \ldots k_n , \tag{4.5}$$

где $\lambda_{\text{ном}}$ - номинальное значение интенсивности отказов, соответствующее нормальным условиям эксплуатации; k_1 , k_2, ... , k_n - поправочные коэффициенты (коэффициенты нагрузки), учитывающие отклонения влияющих величин от нормальных значений; λ - результирующая величина интенсивности отказов.

2.2. Расчет надежности систем со сложной структурой.

Метод перебора состояний. Вероятность того, что система будет находиться в одном из возможных работоспособных состояний, определяется выражением

$$P = \sum_{j=1}^{m} \prod_{l_j} p_l \prod_{k_j} q_k , \tag{4.6}$$

где *m*-общее число работоспособных состояний, в каждом *j*-м из которых число исправных элементов равно l_j, а вышедших из строя - k_j; p_l и q_k - вероятность безотказной работы и вероятность отказа элемента с соответствующим номером.

Метод разложения относительно особого элемента. Этот метод основан на использовании формулы полной вероятности. В сложной системе выделяется особый элемент, все возможные состояния H_i, $i = 1,2, \ldots, n$, которого образуют полную группу:

$$\sum_{i=1}^{n} P\{H_i\} = 1$$

Если А - анализируемое состояние системы, то его вероятность

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^{n} P\{H_i\} P\{A/H_i\}. \tag{4.7}$$

Сомножитель $P\{A/H_i\}$ в каждом из слагаемых правой части (4.7) определяет вероятность состояния А при условии, что особый элемент находится в состоянии H_i. Рассмотрение состояния H_i особого элемента как фиксированного позволяет упростить структурную схему системы, применяемую при расчете надежности, и свести ее к последовательно-параллельному соединению элементов.

2.3. Структурная избыточность

Для повышения надежности технических систем и их компонентов применяют структурную избыточность. С целью сопоставления общего числа однотипных элементов n и числа r работающих элементов, необходимых для функционирования системы, вводится понятие кратности резервирования:

$$k = (n - r)/r. \tag{4.8}$$

Показателями, определяющими эффективность резервирования, являются величины

$$B_\tau = \tau_p/\tau; \quad B_p = P_p/P; \quad B_Q = Q/Q_p, \tag{4.9}$$

где B_τ - выигрыш за счет повышения средней наработки до отказа резервированной системы τ по сравнению с наработкой нерезервированной системы τ; B_p, B_Q - аналогичные показатели, характеризующие повышение вероятности безотказной работы и снижение вероятности отказа.

2.4. Общее постоянное резервирование с целой кратностью

Вероятность отказа совокупности m параллельно работающих элементов при r =1 определяется выражением (4.2), откуда для равнонадежных элементов

$$Q_p = q^m = q^{k+1}; \quad B_Q = q/q^m = 1/q^k, \tag{4.10}$$

где q - вероятность отказа одного элемента.

Для группы резервированных элементов при кратности резервирования k и экспоненциальном законе распределения времени их безотказной работы средняя наработка до отказа определяется выражением:

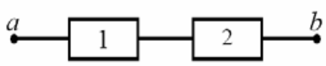
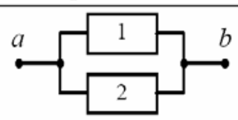
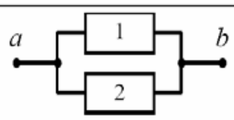
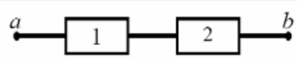
$$\tau_p = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k+1}\right) = \tau\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}, \tag{4.11}$$

где λ – интенсивность отказов одного элемента; $\tau = 1/\lambda$.

2.5. Резервирование двухполюсных элементов

Наиболее характерными типами отказов для двухполюсных элементов релейного типа являются «обрыв» и «короткое замыкание». Учитывая возможные влияния отказов на функционирование системы, можно построить структурные схемы расчета надежности для указанных случаев отказа, которые представлены в таблице 4.1. Построение подобных схем для систем с релейными элементами позволяет рассчитывать их надежность.

Таблица 4.1

Тип отказа	Соединения элементов	
	последовательное	параллельное
обрыв		
короткое замыкание		

3. Задание на выполнение работы

Используя один из программных пакетов (*Excel*, *Mathcad*) по указанию преподавателя, последовательно решить следующие задачи.

Задача 1. Система состоит из 15 элементов, имеющих экспоненциальный закон надежности. Отказ системы происходит при отказе любого из ее элементов. В таблице 4.2 приведены интенсивности отказов λ_i, час$^{-1}$, $i = 1, 2,\ldots ,15$, элементов и их коэффициенты нагрузки $K_{Hi} = 1, 2,\ldots ,15$.

Таблица 4.2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\lambda_i,(\times 10^{-6})$	1	20	30	4	5	70	100	20	1000	70	200	80	90	100	300
K_{Hi}	3	2	1	7	1,2	4	2	1	3	3	1	2,5	2	1,2	3

Найти: а) среднюю наработку системы до отказа τ;

б) вероятность безотказной работы за время $t_1 = 500$ час;

в) вероятность безотказной работы за время $t_2 = 1000$ час.

Задача 2. Система состоит из 3-х идентичных элементов, соединенных параллельно в смысле надежности. Для каждого элемента справедлив экспоненциальный закон надежности с интенсивностью λ.

Найти вероятность безотказной работы системы за время t.

Варианты группового задания

№ варианта	λ, час$^{-1}$	t, час
1	$2 \cdot 10^{-5}$	200
2	$1 \cdot 10^{-5}$	150
3	$1 \cdot 10^{-4}$	300
4	$2 \cdot 10^{-5}$	200
5	$5 \cdot 10^{-4}$	100

Задача 3. В системе применено общее постоянное резервирование с целой кратностью $k = 4$. Для исходной (нерезервированной) системы выполнялся экспоненциальный закон надежности с интенсивностью отказов $\lambda = 2{,}3 \cdot 10^{-4}$ час$^{-1}$.

Найти: 1) выигрыш по вероятности отказа (B_Q) за время t_1;

2) среднюю наработку $\tau_р$ до отказа резервированной системы.

Варианты группового задания

№ варианта	t_1, час
1	200
2	150
3	300
4	200
5	100

Задача 4. Дана схема, представляющая собой соединение реле (рисунок 4.1).

Вероятность безотказной работы каждого реле: 1) по отношению к отказу типа «обрыв» $P_1(t) = e^{-10^{-4}t}$; 2) по отношению к отказу типа «короткое замыкание» $P_2(t) = e^{-10^{-5}t}$

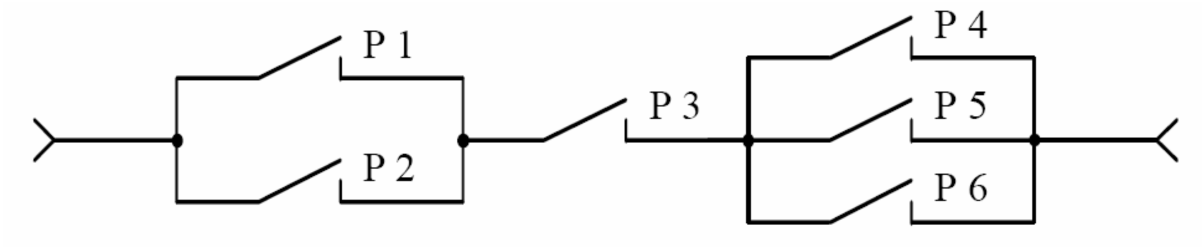


Рисунок 4.1

Определить вероятность отказа всей схемы применительно к «обрыву» $(Q_{C1}(t_1))$ и «короткому замыканию» $(Q_{C2}(t_1))$ при t_1 = 500 час.

Задача 5. Схема соединения элементов (в смысле надежности) имеет вид:

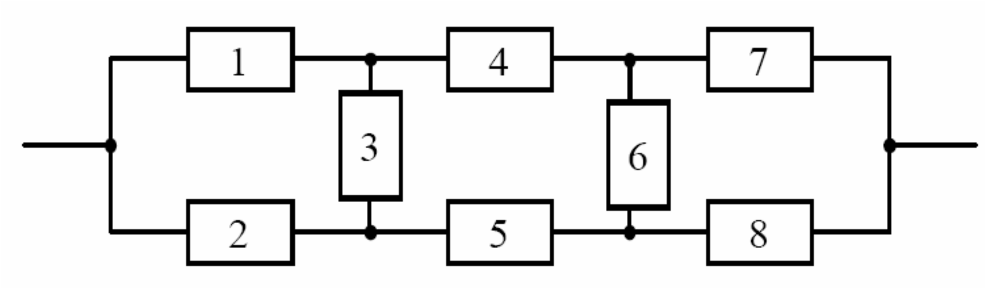


Рисунок 4.2

Все элементы - одинаковые, их вероятность безотказной работы подчиняется закону $P_i(t) = e^{-\lambda t}$, $\lambda = 10^{-3}$ час.$^{-1}$; i = 1, 2,..., 8.

Рассчитать вероятность безотказной работы всего устройства, используя метод разложения относительно особого элемента. Время функционирования системы t = 100 час.

4. Содержание отчета:

- Цель работы;
- Структурные схемы расчета надежности;
- Расчетные формулы решения задач;
- Результаты расчетов.

5. Контрольные вопросы:

- ✓ Чему равна вероятность нахождения системы в одном из работоспособных состояний (метод перебора состояний)?
- ✓ В чем суть метода разложения относительно особого элемента?

- ✓ Что такое кратность резервирования?
- ✓ Назовите показатель, определяющий эффективность резервирования.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ РЕЗЕРВИРОВАННЫХ СИСТЕМ С ДРОБНОЙ КРАТНОСТЬЮ, ОБЩИМ И ПОЭЛЕМЕНТНЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ

1. Цель работы: Ознакомление с методикой и приобретение навыков расчета показателей надежности резервированных систем с дробной кратностью, общим и поэлементным резервированием.

2. Краткие теоретические сведения

Резервирование с дробной кратностью. При резервировании с дробной кратностью система может функционировать, если из *n* однотипных работающих элементов, соединенных параллельно в смысле надежности, в работоспособном состоянии находятся *r*. Система отказывает, если число отказавших элементов *z* составляет $z \geq m = n - r + 1$. Вероятность отказа такой системы равна:

$$Q = \sum_{z=m}^{n} C_n^z q^z (1-q)^{n-z} , \tag{5.1}$$

где $C_n^z = n!/[z!(n-z)!]$ - число сочетаний из n элементов по *z*, *a*, *q* - вероятность отказа одного элемента.

Резервирование с голосованием по большинству.

Этот вид резервирования (рисунок 5.1), называемый также мажоритарным, является разновидностью резервирования с дробной кратностью. Наличие в системе «элемента голосования» (Э.Г.) позволяет обеспечить сопоставление информации о каждом из *n* каналов таким образом, что выход системы формируется путем выбора «по большинству».

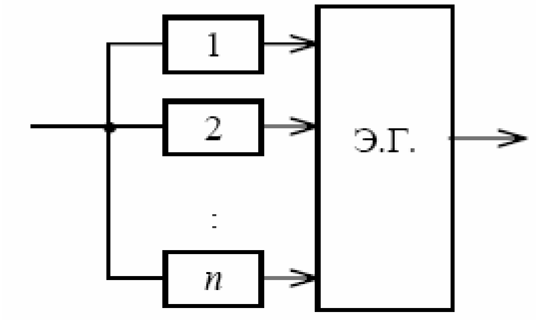


Рисунок 5.1

Вероятность отказа трехканальной мажоритарной схемы (без учета надежности Э.Г.) равна:

$$Q_{М.С.} = C_3^2 q^2 (1-q) + C_3^3 q^3 = 3q^2 - 2q^3, \tag{5.2}$$

где q - вероятность отказа одного из сопоставляемых каналов.

Вероятность отказа с учетом возможности отказа Э.Г. равна:

$$Q = 1 - P_{М.С.} \cdot P_{Э.Г.}, \tag{5.3}$$

где $P_{м.с.}$, $P_{э.г.}$ - вероятности безотказной работы собственно мажоритарной схемы и элемента голосования.

Общее и поэлементное резервирование. В случае общего резервирования кратности k системы из n элементов (рисунок 5.2) вероятность отказа системы определяется выражением

$$Q_{о.р.} = \left[1 - (1-q)^n\right]^{k+1}, \tag{5.4}$$

где q - вероятность отказа одного элемента.

Для системы, состоящей из n участков с поэлементным резервированием (рисунок 5.3) целой кратности k_i, $i = 1, 2, \ldots n$, вероятность безотказной работы равна:

$$P = \prod_{i=1}^{n} P_i = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \prod_{j=0}^{k_i} q_{ij}\right), \tag{5.5}$$

где q_{ij} - вероятность отказа j-го элемента, входящего в i-й участок резервирования; P - вероятность безотказной работы i-го участка.

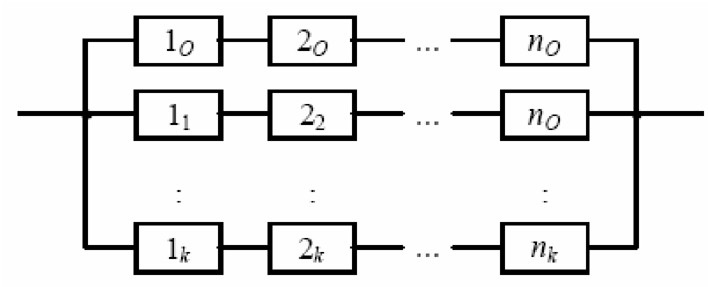


Рисунок 5.2

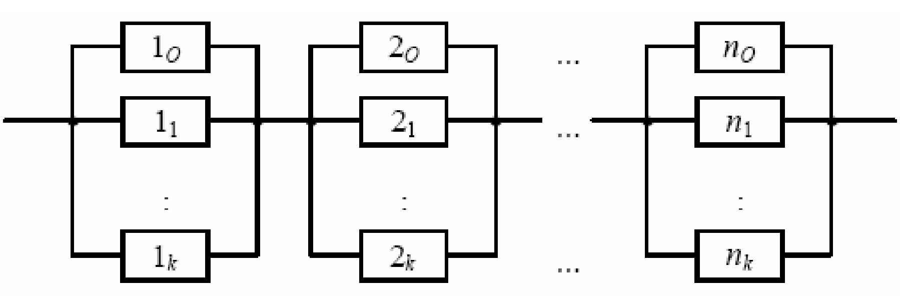


Рисунок 5.3

Такое соединение эффективнее общего резервирования системы.

Резервирование замещением. Если резерв вводится в состав системы после отказа основного элемента и сопровождается переключающими операциями, то имеет место резервирование замещением - активное резервирование.

При этом способе резервирования (рисунок 5.4) резервные элементы могут находиться в нагруженном, облегченном и ненагруженном состоянии.

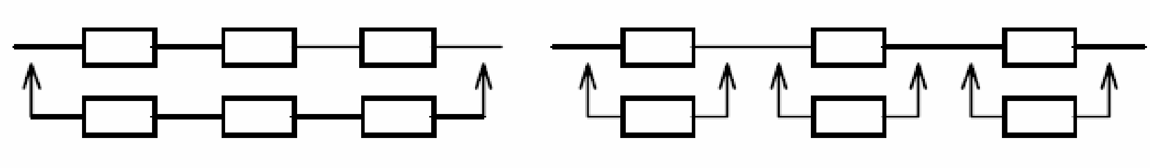


Рисунок 5.4

В случае применения общего резервирования замещением с кратностью k для случая экспоненциального закона надежности с интенсивностью λ вероятность безотказной работы системы определяется выражением:

$$P_P(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} . \tag{5.6}$$

3. Задание на выполнение работы

Используя один из программных пакетов (*Excel, Mathcad*), последовательно решить следующие задачи.

Задача 1. Дана система, в которой использовано резервирование с дробной кратностью. Количество элементов, необходимых для работы системы, r; общее число элементов (включая резервные) n. Вероятность безотказной работы элемента за заданное время p. Найти вероятность безотказной работы системы.

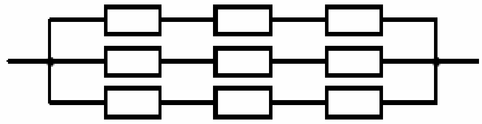
Варианты группового задания

№ варианта	r	n	p
1	4	7	0,92
2	5	7	0,95
3	3	6	0,95
4	2	5	0,9
5	4	10	0,96

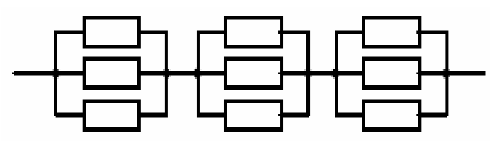
Задача 2. В системе применено мажоритарное резервирование (резервирование с голосованием по большинству) по принципу «2 из 3-х». Вероятность безотказной работы одного канала p = 0,95, вероятность безотказной работы элемента голосования $P_{ЭГ}$ = 0,98. Найти вероятность отказа Q_c всей системы.

Задача 3. Даны 2 варианта резервирования системы:

1) общее



2) поэлементное



Вероятность безотказной работы одного элемента подчиняется экспоненциальному закону: $P(t)=e^{-\lambda t}$, где $\lambda = 2\cdot10^{-3}$ час.$^{-1}$. Найти вероятность безотказной работы для двух вариантов построения резервированной системы при t =300 час.

Задача 4. В системе применено общее резервирование замещением, для чего использованы 4 резервных системы, полностью идентичные основной. Каждая из систем подчиняется экспоненциальному закону надежности с интенсивностью $\lambda = 2\cdot10^{-3}$ час.$^{-1}$. Найти вероятность безотказной работы резервированной системы $P_P(t)$ за время t = 200 час.

Задача 5. В системе - два блока, причем один из них резервируется путем замещения, у второго - применяется постоянное резервирование (троирование). Для обоих блоков имеет место экспоненциальный закон надежности, причем интенсивности отказов $\lambda_1 = 2\cdot10^{-4}$ час.$^{-1}$, $\lambda_2 = 3\cdot10^{-4}$ час.$^{-1}$. Найти вероятность отказа системы за время t = 200 час.

4. Содержание отчета:

- Цель работы;
- Структурные схемы расчета надежности;
- Расчетные формулы решения задач;
- Результаты расчетов;
- Выводы.

5. контрольные вопросы:

- ✓ Назовите основные способы обеспечения заданного уровня надёжности систем и объектов.
- ✓ Назовите основные виды резервирования систем и объектов.
- ✓ Назовите основные виды структурного резервирования невосстанавливаемых объектов.
- ✓ В чём различие между активным и пассивным резервированием?
- ✓ В чём особенность резервирования восстанавливаемых систем?
- ✓ В чём особенность резервирования элементов с различным характером отказов?

Литература:

1. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 2003 - СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 2007. - 384 с.

2. Вентцель Е.С, Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Наука, 2008. - 480 с.

3. Очков В.Ф. Mathcad 14 Pro для студентов и инженеров. - М.: КомпьютерПресс, 2008. - 384 с.

4. Ястребенецкий М. А., Иванова Г. М. Надежность автоматизированных систем управления технологическими процессами: Учеб. пособие для вузов - М: Энергоатомиздат, 1989.- 264 с.

5. Рыжкин А.А., Слюсарь Б.Н., Шучев К.Г. Основы теории надежности : / Учебное пособие. Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2002. - 182 с. ISBN:5-7890-0209-9.