Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный университет»

Экономический факультет

Кафедра экономического анализа и бухгалтерского учета

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания

к практическим занятиям
для студентов экономического факультета
направления подготовки 080100.62 «Экономика»

Иваново
Издательство «Ивановский государственный университет»
2013

Составитель: канд. эк. наук, доц. **Плетюхина С. А.**

Методические указания предназначены для бакалавров экономического факультета ИвГУ по направлению 080100.62 «Экономика». Содержат программу курса «Методы оптимальных решений», варианты контрольных заданий, а также методические указания по их выполнению. Более подробные руководства можно найти в рекомендуемой литературе.

Печатается по решению методической комиссии

экономического факультета

Ивановского государственного университета

Рецензент:

кандидат химических наук Очеретовый А.С. (ИвГУ)

Оглавление

Цели и задачи дисциплины:

- Получение базовых знаний и формирование основных навыков использования методов оптимальных решений, необходимых для решения задач, возникающих в практической экономической деятельности.
- Развитие понятийной математической базы и формирование определенного уровня математической подготовки, необходимых для решения теоретических и прикладных задач экономики, их количественного и качественного анализа.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:

В совокупности с другими дисциплинами базовой части ФГОС ВПО дисциплина «Методы оптимальных решений» направлена на формирование следующих общекультурных (ОК) и профессиональных (ПК) компетенций бакалавра экономики:

ОК-1 – студент владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;

ПК-1 – студент способен собирать и анализировать исходные данные, необходимые для расчёта экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов;

ПК-2 – студент способен на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитывать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов;

ПК-3 – студент способен выполнять расчёты, необходимые для составления экономических разделов планов. Обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами;

ПК-4 – студент способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач;

ПК-5 – студент способен выбирать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, анализировать результаты расчётов и обосновывать полученные выводы.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать: основные принципы и математические методы анализа решений, основные определения и понятия изучаемых разделов дисциплины.

уметь: формулировать и доказывать основные результаты этих разделов, использовать математические методы при решении экономических задач, выбирать рациональные варианты действий в практических задачах принятия решений с использованием экономико-математических моделей.

владеть: оптимизационными математическими методами исследования и навыками решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала, иметь представление о проблематике и перспективах развития теории принятия решений как одного из важнейших направлений, связанных с созданием и внедрением новых информационных технологий.

Программа курса

1. Введение в курс «Методы оптимальных решений».
2. Введение в линейное программирование.
3. Геометрический и симплексный методы решения задач линейного программирования.
4. Метод искусственного базиса.
5. Транспортная задача.

Правила выполнения и оформления контрольной работы

Каждый студент выполняет один вариант контрольной работы, содержащей 5 заданий. Номер варианта определяется начальной буквой фамилии студента в соответствии с нижеприведенной таблицей.

Номер варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Начальная буква фамилии студента	А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И
	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У
	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Э	Ю	Я	

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради и предъявляется преподавателю не позднее, чем за три дня до экзамена.

Работа должна быть оформлена аккуратно, решение каждого задания должно сопровождаться подробными пояснениями. Если контрольная работа не зачтена преподавателем, необходимо в этой же тетради сделать работу над ошибками. Студент, не выполнивший контрольную работу, к экзамену не допускается.

Рекомендуемая литература

1. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2005.
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – Лань, 2011.
3. Плетюхина С. А. Методы решения оптимизационных экономических задач: Учеб. пособие. – Иваново: Иван. гос. ун-т, 2006.
4. Волошин Г.Я. Методы оптимизации в экономике: Учебное пособие. – М.: «Из-во «Дело и Сервис», 2004.
5. Лунгу К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
6. Палий И. А. Линейное программирование. Учебное пособие / И. А. Палий. – М.: Эксмо, 2008.
7. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА–М, 2003.
8. Струченков В. И. Методы оптимизации в прикладных задачах [Электронный ресурс] / В. И. Струченков. – М.: СОЛОН–ПРЕСС, 2009. – 315 с.
9. Лагоша Б. А., Апалькова Т. Г. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения [Электронный ресурс] / Б. А. Лагоша, Т. Г. Апалькова. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 221 с.
10. Розова В. Н., Максимова И. С. Методы оптимизации. Учебное пособие [Электронный ресурс] / В. Н. Розова, И. С. Максимова. – М.: Российский университет дружбы народов, 2010. – 111 с.

Варианты заданий контрольной работы

<u>Задание 1.</u> Решить графически задачу линейного программирования.

Вариант № 1

$$\begin{aligned} &Z = 2x_1 + x_2 \to \min \\ &x_1 + x_2 \le 12 \\ &2x_1 - x_2 \le 12 \\ &2x_1 - x_2 \ge 0 \\ &2x_1 + x_2 \ge 4 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

Вариант № 2

$$\begin{aligned} &Z = x_1 + 3x_2 \to \max \\ &-x_1 + x_2 \le 6 \\ &-2x_1 + x_2 \le 6 \\ &x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ &x_1 - 2x_2 \le 2 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

Вариант № 3

$$\begin{aligned} &Z = 4x_1 - 3x_2 \to \max \\ &-x_1 + x_2 \le 5 \\ &5x_1 - 2x_2 \le 20 \\ &8x_1 - 3x_2 \ge 0 \\ &5x_1 - 6x_2 \le 0 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

Вариант № 4

$$\begin{aligned} &Z = -x_1 + 4x_2 \to \min \\ &2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ &-8x_1 + 3x_2 \le 24 \\ &2x_1 - 3x_2 \le 12 \\ &4x_1 + 3x_2 \ge 0 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

Вариант № 5

$$\begin{aligned} &Z = x_1 + 2x_2 \to \max \\ &-3x_1 + x_2 \le 12 \\ &x_1 + x_2 \ge 0 \\ &x_1 - x_2 \le 0 \\ &x_1 + 2x_2 \le 12 \\ &x_2 \le 6 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

Вариант № 6

$$\begin{aligned} &Z = 3x_1 + x_2 \to \max \\ &2x_1 + x_2 \ge -4 \\ &x_1 + x_2 \ge 0 \\ &x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ &x_1 - x_2 \le 2 \end{aligned}$$

Вариант № 7

$$\begin{aligned} &Z = 3x_1 + 5x_2 \to \min \\ &x_1 + x_2 \ge 0 \\ &3x_1 + x_2 \le 3 \\ &5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\ &x_1 - x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Вариант № 8

$$\begin{aligned} &Z = x_1 + 3x_2 \to \max \\ &-2x_1 + x_2 \le 2 \\ &-x_1 + 2x_2 \le 7 \\ &x_1 + 3x_2 \le 18 \\ &4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

Вариант № 9

$$\begin{aligned} &Z = x_1 + 4x_2 \to \max \\ &-4x_1 + x_2 \le 4 \\ &-x_1 + x_2 \le 5 \\ &-x_1 + 2x_2 \le 2 \\ &3x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

Вариант № 10

$$\begin{aligned} &Z = -3x_1 + 2x_2 \to \max \\ &-3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ &3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ &3x_1 + x_2 \le 15 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

<u>Задание 2.</u> Построить математическую модель задачи.

Вариант № 1

Кукуруза и клевер содержат кальций, фосфор, белки, углеводы. Количественный состав (в единицах массы) задан таблицей.

Состав	**Фураж**	
	Кукуруза	**Клевер**
Кальций	2	2
Фосфор	0	25
Белки	12	1
Углеводы	3	15

Рацион для скота должен включать не менее 8 ед. кальция, 14 ед. фосфора, 20 ед. белков, 30 ед. углеводов. При этом запасы кукурузы составляют 24 ед., а клевера – 19 ед. Требуется составить самый дешевый рацион из имеющегося фуража, если цена единицы массы кукурузы составляет 3 руб., а клевера – 6 руб.

Вариант № 2

Некоторому заводу требуется составить оптимальный по реализации производственный план выпуска двух видов изделий при определенных возможностях четырех типов машин. План выпуска должен быть таким, чтобы от реализации выпущенной продукции завод получил наибольшую прибыль. В таблице указано время, необходимое для обработки каждого изделия указанными типами машин, максимально возможное время работы каждой машины и прибыль от реализации.

Виды изделий	**Типы машин**				**Прибыль**
	A	**B**	**C**	**D**	
I	1	0,5	1	0	6
II	1	1	0	1	2
Время работы	18	12	12	9	

Вариант № 3

С железнодорожного вокзала можно отправлять скорые и курьерские поезда. Наличный парк вагонов и их вместимость указаны в таблице.

Тип вагонов	**Багаж–ные**	**Почто–вые**	**Жесткие**	**Купей–ные**	**Мягкие**	**Вид поезда**
Число вагонов в поезде	1	–	5	6	3	Курьерский
	1	1	8	4	1	Скорый
Вместимость вагонов	–	–	58	40	32	
Наличный парк	12	8	81	70	27	

Требуется выбрать такое соотношение между числом курьерских и скорых поездов, чтобы число ежедневно отправляемых пассажиров было максимальным.

Вариант № 4

В опытном хозяйстве нашли, что откорм животных выгоден лишь тогда, когда каждое животное получает в дневном рационе не менее 6 единиц питательного вещества **А**, не менее 12 единиц питательного вещества **В** и не менее 4 единиц питательного вещества **С**, при этом используются два вида корма. Содержание питательных веществ в 1 кг каждого вида корма приведено в таблице.

Вид питательного вещества	**Вид корма**	
	I	**II**
А	2	1
В	2	4
С	0	4

Цена корма **I** равна 0,5 денежных единиц за 1 кг, цена корма **II** – 0,6 денежных единиц за 1 кг. Какое количество корма необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на него были минимальными при соблюдении указанных выше условий.

Вариант № 5

Имеется два вида продукта питания **А** и **В**, каждый из которых содержит белки, жиры и углеводы. Количественный состав этих продуктов и их цена заданы таблицей.

Состав	Продукт	
	А	**В**
Белки	3	3
Жиры	2	1
Углеводы	3	8
Цена	4 руб.	6 руб.

Минимальная потребность в питательных веществах – белках, жирах и углеводах – соответственно 45, 10, 60 единиц, при этом можно потребить продукта **А** не более 25 единиц, а продукта **В** – не более 30 единиц. Требуется рассчитать необходимое количество обоих продуктов так, чтобы удовлетворить потребность организма в указанных веществах при минимальных денежных затратах.

Вариант № 6

На рынок в город привозят одним видом транспорта картофель из трех совхозов по 4, 3.5 и 3 рубля за 1 кг соответственно. На погрузку тонны картофеля ленточным способом в 1–м совхозе требуется 1 минута, во 2–м – 4 минуты, в 3–м – 3 минуты. Чтобы продукт вовремя поступил на рынок, надо, чтобы на погрузку 12 тонн, необходимых городу на каждый день, затрачивалось не более 40 мин. Сколько надо привезти картофеля из каждого совхоза, чтобы общая стоимость его на рынке была минимальной, если известно, что 1–й совхоз может ежедневно отправлять не более 10 тонн, 2–й совхоз – не более 8 тонн, 3–й совхоз – не более 6 тонн.

Вариант № 7

Одной из ученических бригад выделили два участка земли в 8 га и 9 га под посевы пшеницы и кукурузы. Средняя урожайность по участкам и культурам приведена в таблице (в ц/га).

Культура	Участки	
	I	II
Пшеница	16	14
Кукуруза	35	30

За 1 ц пшеницы получают 2,5 руб., за 1 ц кукурузы – 1,4 руб. Сколько гектаров необходимо отвести под каждую культуру, чтобы получить от реализации наибольшую сумму, если по плану надо собрать не менее 150 ц пшеницы и не менее 220 ц кукурузы?

Вариант № 8

Из листового проката определенной формы необходимо вырезать некоторое количество заготовок двух типов **А** и **В** для производства 90 штук изделий. Для одного изделия требуется две заготовки типа **А** и десять заготовок типа **В**. Возможны четыре варианта раскроя одного листа проката. Количество заготовок **А** и **В**, вырезаемых из одного листа при каждом варианте раскроя и отходы от раскроя указаны в таблице.

Вариант раскроя	Заготовки, шт.		Отходы от раскроя, ед.
1	4	0	10
2	3	3	5
3	1	9	3
4	0	12	0

Какое количество листов проката нужно раскроить каждым вариантом для изготовления 90 штук изделий, чтобы отходы от раскроя были наименьшими?

Вариант № 9

Цех выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг трансформаторного железа и 4 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида – 3 кг железа и 1,6 кг проволоки. На изготовление этих трансформаторов имеется 350 кг трансформаторного железа и 240 кг проволоки. По плану в цехе должно быть изготовлено не менее 20 штук трансформаторов первого вида и не менее 30 штук – второго. Сколько штук трансформаторов каждого вида нужно производить, чтобы получить наибольшую прибыль, если от реализации одного трансформатора первого вида цех получает 5 руб., а второго – 3 руб.

Вариант № 10

В швейном цехе имеется 240 метров ткани. На пошив одного рабочего халата требуется 3 метра, а на пошив одной рабочей куртки – 2 метра. Сколько следует изготовить халатов и курток, чтобы получить наибольшую прибыль от реализации продукции, если халат стоит 6 руб., а куртка – 3 руб. Известно, что халатов нужно изготовить не более 50 штук, а курток – не более 60 штук.

Задание 3. Решить задачу линейного программирования симплексным методом.

Предприятие выпускает два вида продукции ***A*** и ***B***, для производства которых используется сырье трех типов. На изготовление единицы изделия ***A*** требуется затратить сырья каждого типа a_1, a_2, a_3 ***кг*** соответственно, а для единицы изделия ***B:*** b_1, b_2, b_3 ***кг***. Производство обеспечено сырьем каждого типа в количестве p_1, p_2, p_3 ***кг*** соответственно. Прибыль от реализации единицы изделия ***A*** составляет α ***руб.***, а единицы изделия ***B*** – β ***руб.*** Составить план производства изделий ***A*** и ***B***, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Вариант № 1	$a_1 = 2$	$b_1 = 6$	$p_1 = 486$	$\alpha = 4$
	$a_2 = 4$	$b_2 = 2$	$p_2 = 396$	$\beta = 6$
	$a_3 = 3$	$b_3 = 3$	$p_3 = 351$	

Вариант № 2	$a_1 = 3$	$b_1 = 9$	$p_1 = 648$	$\alpha = 4$
	$a_2 = 4$	$b_2 = 2$	$p_2 = 352$	$\beta = 3$
	$a_3 = 2$	$b_3 = 2$	$p_3 = 208$	

Вариант № 3	$a_1 = 2$	$b_1 = 10$	$p_1 = 900$	$\alpha = 2$
	$a_2 = 6$	$b_2 = 3$	$p_2 = 702$	$\beta = 5$
	$a_3 = 3$	$b_3 = 5$	$p_3 = 540$	

Вариант № 4	$a_1 = 1$	$b_1 = 5$	$p_1 = 350$	$\alpha = 6$
	$a_2 = 4$	$b_2 = 2$	$p_2 = 364$	$\beta = 5$
	$a_3 = 3$	$b_3 = 5$	$p_3 = 420$	

Вариант № 5	$a_1 = 1$	$b_1 = 4$	$p_1 = 352$	$\alpha = 5$
	$a_2 = 4$	$b_2 = 3$	$p_2 = 484$	$\beta = 10$
	$a_3 = 3$	$b_3 = 4$	$p_3 = 440$	

Вариант № 6	$a_1 = 2$	$b_1 = 8$	$p_1 = 384$	$\alpha = 8$
	$a_2 = 3$	$b_2 = 4$	$p_2 = 240$	$\beta = 7$
	$a_3 = 4$	$b_3 = 3$	$p_3 = 264$	

Вариант № 7	$a_1 = 2$	$b_1 = 4$	$p_1 = 168$	$\alpha = 6$
	$a_2 = 4$	$b_2 = 1$	$p_2 = 132$	$\beta = 8$
	$a_3 = 4$	$b_3 = 3$	$p_3 = 156$	

Вариант № 8	$a_1 = 4$	$b_1 = 1$	$p_1 = 220$	$\alpha = 6$
	$a_2 = 1$	$b_2 = 2$	$p_2 = 140$	$\beta = 3$
	$a_3 = 4$	$b_3 = 3$	$p_3 = 260$	

Вариант № 9	$a_1 = 2$	$b_1 = 4$	$p_1 = 480$	$\alpha = 6$
	$a_2 = 7$	$b_2 = 3$	$p_2 = 580$	$\beta = 2$
	$a_3 = 6$	$b_3 = 1$	$p_3 = 450$	

Вариант № 10	$a_1 = 7$	$b_1 = 3$	$p_1 = 754$	$\alpha = 3$
	$a_2 = 1$	$b_2 = 2$	$p_2 = 312$	$\beta = 4$
	$a_3 = 6$	$b_3 = 1$	$p_3 = 585$	

<u>Задание 4.</u> Решить задачу линейного программирования симплексным методом. Для нахождения начального опорного плана воспользоваться методом искусственного базиса.

Вариант № 1

$$-x_1 - 10x_2 + x_3 - 5x_4 \to \min$$

$$\begin{aligned} 4x_2 + 2x_3 &= 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2, \\ 7x_2 + 4x_3 &= 7, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0.$$

Вариант № 2

$$-x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 &= 4, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0.$$

Вариант № 3

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 10x_4 &= 24, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0.$$

Вариант № 4

$$-x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 10x_4 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 &= 11, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0.$$

Вариант № 5

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 4, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0.$$

Вариант № 6

$$-x_1 - 4x_2 - x_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ -2x_1 - 5x_2 - x_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0.$$

Вариант № 7

$$-x_1 + 10x_2 - x_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5{,}5x_2 - 7x_3 &= -13, \\ x_1 - 14{,}5x_2 + 7x_3 &= 15, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0.$$

Вариант № 8

$$-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \to \min$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 10, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 20, \\ 10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 &= 30, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0.$$

Вариант № 9

$$x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 8, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 &= -6, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 &= 2, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0.$$

Вариант № 10

$$-x_4 + x_5 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0.$$

<u>Задание 5.</u> Однородный груз сосредоточен у трех поставщиков в объемах a_1, a_2, a_3. Данный груз необходимо доставить четырем потребителям, потребности которых составляют b_1, b_2, b_3, b_4 соответственно. Стоимости перевозок единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю заданы матрицей *C*. Требуется составить план перевозок, обеспечивающий минимальные суммарные затраты на перевозку.

Вариант № 1

a) a_1=330, a_2=270, a_3=350,

b_1=270, b_2=220, b_3=260, b_4=200

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 50 & 42 \\ 22 & 49 & 66 & 32 \\ 27 & 35 & 67 & 63 \end{pmatrix}$$

b) a_1=300, a_2=250, a_3=300,

b_1=200, b_2=180, b_3=180, b_4=240

$$C = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 21 & 24 \\ 23 & 26 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 27 & 29 \end{pmatrix}$$

Вариант № 2

a) a_1=150, a_2=200, a_3=100,

b_1=150, b_2=105, b_3=90, b_4=105

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 23 & 10 & 17 \\ 17 & 14 & 12 & 20 \\ 13 & 24 & 16 & 12 \end{pmatrix}$$

b) a_1=200, a_2=300, a_3=190,

b_1=190, b_2=210, b_3=180, b_4=170

$$C = \begin{pmatrix} 26 & 25 & 16 & 23 \\ 32 & 20 & 25 & 33 \\ 26 & 25 & 34 & 32 \end{pmatrix}$$

Вариант № 3

a) a_1=300, a_2=350, a_3=200,

b_1=195, b_2=255, b_3=190, b_4=210

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 31 & 35 & 25 \\ 9 & 25 & 21 & 9 \\ 41 & 30 & 35 & 33 \end{pmatrix}$$

b) a_1=270, a_2=450, a_3=330,

b_1=270, b_2=230, b_3=250, b_4=260

$$C = \begin{pmatrix} 37 & 30 & 15 & 37 \\ 16 & 19 & 13 & 21 \\ 10 & 20 & 19 & 26 \end{pmatrix}$$

Вариант № 4

a) a_1=300, a_2=300, a_3=250,

b_1=190, b_2=165, b_3=225, b_4=270

$$C=\begin{pmatrix}23 & 20 & 15 & 24\\ 15 & 16 & 19 & 29\\ 11 & 10 & 9 & 8\end{pmatrix}$$

b) a_1=200, a_2=440, a_3=280,

b_1=200, b_2=250, b_3=220, b_4=280

$$C=\begin{pmatrix}19 & 20 & 27 & 32\\ 39 & 41 & 21 & 12\\ 15 & 20 & 14 & 28\end{pmatrix}$$

Вариант № 5

a) a_1=300, a_2=230, a_3=320,

b_1=240, b_2=200, b_3=180, b_4=230

$$C=\begin{pmatrix}25 & 20 & 22 & 31\\ 11 & 19 & 18 & 18\\ 26 & 30 & 17 & 19\end{pmatrix}$$

b) a_1=200, a_2=400, a_3=250,

b_1=100, b_2=125, b_3=325, b_4=350

$$C=\begin{pmatrix}10 & 5 & 3 & 8\\ 5 & 4 & 6 & 2\\ 9 & 7 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Вариант № 6

a) a_1=300, a_2=250, a_3=300,

b_1=180, b_2=180, b_3=240, b_4=250

$$C=\begin{pmatrix}21 & 24 & 32 & 24\\ 10 & 19 & 20 & 26\\ 27 & 29 & 23 & 25\end{pmatrix}$$

b) a_1=350, a_2=330, a_3=270,

b_1=260, b_2=230, b_3=200, b_4=210

$$C=\begin{pmatrix}3 & 12 & 1 & 9\\ 2 & 4 & 2 & 11\\ 7 & 14 & 5 & 12\end{pmatrix}$$

Вариант № 7

a) a_1=200, a_2=300, a_3=250,

b_1=170, b_2=190, b_3=210, b_4=180

$$C=\begin{pmatrix}16 & 25 & 26 & 23\\ 25 & 30 & 30 & 33\\ 34 & 25 & 23 & 32\end{pmatrix}$$

b) a_1=300, a_2=200, a_3=165,

b_1=240, b_2=180, b_3=165, b_4=165

$$C=\begin{pmatrix}13 & 8 & 2 & 7\\ 11 & 4 & 9 & 17\\ 10 & 16 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

Вариант № 8

a) $a_1=270$, $a_2=450$, $a_3=330$,

$b_1=240$, $b_2=260$, $b_3=280$, $b_4=270$

$$C=\begin{pmatrix} 30 & 15 & 19 & 37 \\ 19 & 13 & 19 & 21 \\ 20 & 19 & 29 & 26 \end{pmatrix}$$

b) $a_1=350$, $a_2=200$, $a_3=300$,

$b_1=200$, $b_2=190$, $b_3=225$, $b_4=195$

$$C=\begin{pmatrix} 14 & 22 & 16 & 28 \\ 17 & 19 & 26 & 36 \\ 30 & 37 & 31 & 39 \end{pmatrix}$$

Вариант № 9

a) $a_1=210$, $a_2=450$, $a_3=290$,

$b_1=250$, $b_2=220$, $b_3=200$, $b_4=280$

$$C=\begin{pmatrix} 27 & 32 & 32 & 20 \\ 21 & 12 & 21 & 41 \\ 14 & 28 & 27 & 20 \end{pmatrix}$$

b) $a_1=150$, $a_2=200$, $a_3=100$,

$b_1=100$, $b_2=90$, $b_3=120$, $b_4=100$

$$C=\begin{pmatrix} 17 & 23 & 15 & 10 \\ 20 & 13 & 17 & 12 \\ 12 & 21 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Вариант № 10

a) $a_1=200$, $a_2=175$, $a_3=225$,

$b_1=180$, $b_2=100$, $b_3=190$, $b_4=130$

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

b) $a_1=230$, $a_2=250$, $a_3=170$,

$b_1=100$, $b_2=130$, $b_3=150$, $b_4=190$

$$C=\begin{pmatrix} 19 & 26 & 27 & 25 \\ 25 & 27 & 36 & 18 \\ 35 & 38 & 45 & 40 \end{pmatrix}$$

Указания по выполнению контрольной работы

<u>Задание 1.</u> Решить графически задачу линейного программирования.

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{array}{rcrcrr} x_1 & - & x_2 & \geq & -2 & (1) \\ 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 6 & (2) \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 & (3) \\ & & x_2 & \leq & 3 & (4) \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Пронумеруем ограничения задачи и построим область ее допустимых решений. В прямоугольной декартовой системе координат построим прямую $x_1 - x_2 = -2$, соответствующую ограничению (1) (рис. 1). Найдем, какая из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю координатную плоскость, является решением неравенства (1). Для этого координаты любой точки, не лежащей на прямой, подставим в неравенство. Так как построенная прямая не проходит через начало координат, подставим координаты точки $O\ (0, 0)$ в первое ограничение: $1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \geq -2$. Получим строгое неравенство $-2 < 0$. Следовательно, точка O принадлежит полуплоскости решений. Таким образом, стрелки на концах прямой (1) должны быть направлены в полуплоскость, содержащую точку O. Аналогично построим прямые и области решений ограничений (2), (3), (4). Найдем пересечение полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности; построенную область допустимых решений отметим штриховкой.

Построим одну из линий уровня функции $Z(X)$, например $3x_1 + 2x_2 = 0$, и вектор $\vec{q} = (3,\ 2)$. Так как решается задача на отыскание максимума целевой функции, то линию уровня будем перемещать в направлении вектора до опорной прямой. Эта прямая проходит через точку X^* пересечения прямых, ограничивающих область допустимых решений и соответствующих неравенствам (2), (4). Определим координаты точки X^*, как точки пересечения прямых (2), (4).

Решив систему $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 6, \\ x_2 = 3, \end{cases}$ получим $X^* = (4,\ 3)$. Вычислим $Z(X^*) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$.

Ответ: $Z(X) = 18$ при $X^* = (4, 3)$.

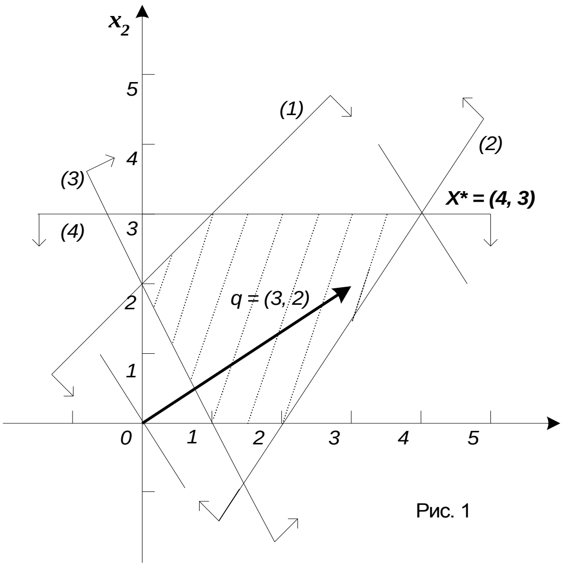

Рис. 1

<u>Задание 2.</u> Построить математическую модель задачи.

Детали двух видов $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ обрабатываются последовательно на трех станках. Известны: время обработки детали каждого вида каждым станком и суммарное время работы станков в планируемый период, а также прибыль, получаемая от реализации одной детали каждого вида. Эти данные приведены в таблице.

Станки	**Время работы станков (ед. времени)**	**Время обработки одной детали**	
		$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$
I	16	1	2
II	28	2	3
III	30	3	3
Прибыль (ден. ед.)		4	3

Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль, при условии, что количество деталей вида $\mathbf{A_2}$ не должно быть меньше количества деталей вида $\mathbf{A_1}$.

Обозначим через x_1 – количество деталей вида **A₁**, через x_2 – количество деталей **A₂.**

Прибыль от реализации x_1 деталей вида $\mathbf{A_1}$ и x_2 деталей вида $\mathbf{A_2}$ составит $4x_1 + 3x_2$ ден. ед., а целевая функция будет иметь следующий вид: $F = 4x_1 + 3x_2$.

Так как время обработки x_1 деталей вида $\mathbf{A_1}$ и x_2 деталей вида $\mathbf{A_2}$ на первом станке не должно превышать ***16*** ед. времени, то первое ограничение задачи запишем следующим образом: $x_1 + 2x_2 \leq 16$.

Аналогично запишем второе и третье ограничения:

$2x_1 + 3x_2 \leq 28,$
$3x_1 + 3x_2 \leq 30.$

Поскольку количество деталей вида $\mathbf{A_2}$ не должно быть меньше количества деталей вида $\mathbf{A_1}$, получим еще одно ограничение $x_1 \leq x_2$.

Кроме того, переменные x_1 , x_2 не могут принимать отрицательные значения, т.е. $x_1 \geq 0$, $x_1 \geq 0$.

Тогда математическая модель задачи будет иметь следующий вид.

Найти максимум целевой функции

$$F = 4x_1 + 3x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 28, \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ x_1 \leq x_2 , \\ x_1 \geq 0 , x_1 \geq 0 . \end{cases}$$

<u>Задание 3.</u> Решить задачу линейного программирования симплексным методом.

Для производства четырех видов продукции $\mathbf{P_1, P_2, P_3, P_4}$ предприятие использует три вида сырья $\mathbf{S_1, S_2, S_3}$, запасы которого на планируемый период составляют соответственно ***1000, 600*** и ***150*** условных единиц. В приведенной таблице даны технологические коэффициенты, т.е. расход каждого вида сырья на производство единицы каждого вида продукции и прибыль от реализации единицы продукции каждого вида.

Виды сырья	Запасы сырья	Технологические коэффициенты			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	1000	5	1	0	2
S_2	600	4	2	2	1
S_3	150	1	0	2	1
Прибыль от реализации		6	2	2,5	4

Требуется составить такой план выпуска продукции, чтобы обеспечить максимальную прибыль от реализации.

Пусть $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, $\boldsymbol{x_4}$ – число единиц продукции P_1, P_2, P_3, P_4. Тогда экономико–математическая модель задачи будет следующей: найти такой план выпуска продукции $\boldsymbol{X = (x_1, x_2, x_3, x_4)}$, удовлетворяющий ограничениям

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_4 \le 1000, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 600, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 150, \end{cases}$$

и условиям

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,$$

при котором функция $\boldsymbol{F = 6x_1 + 2x_2 + 2{,}5x_3 + 4x_4}$ принимает максимальное значение.

Приведем задачу к кононическому виду. Для обращения системы ограничений–неравенств в систему уравнений прибавим к левой части каждого неравенства дополнительные неотрицательные переменные $\boldsymbol{x_5}$, $\boldsymbol{x_6}$, $\boldsymbol{x_7}$. Эти переменные имеют конкретное экономическое содержание, а именно – объем остатков сырья каждого вида после выполнения плана выпуска продукции.

После введения дополнительных переменных получим систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 1000, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 600, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_7 = 150, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\quad j = 1, 2, \ldots, 7.$$

Так как система ограничений состоит из трех уравнений с семью переменными, то число основных переменных должно равняться трем, а число неосновных – четырем. Для решения задачи, прежде всего, нужно найти любое допустимое базисное решение. Для этого возьмем в качестве основных дополнительные переменные x_5, x_6, x_7, поскольку определитель при этих коэффициентах образует единичную матрицу и, следовательно, он отличен от нуля.

I шаг. ***Основные переменные*** x_5, x_6, x_7; ***неосновные*** – x_1, x_2, x_3, x_4.

Выразим основные переменные через неосновные.

$$\begin{cases} x_5 = 1000 - 5x_1 - x_2 - 2x_4, \\ x_6 = 600 - 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4, \\ \boxed{x_7 = 150 - x_1 - 2x_3 - x_4,} \end{cases}$$

$$F = 6x_1 + 2x_2 + 2{,}5x_3 + 4x_4.$$

Положив неосновные переменные x_1, x_2, x_3, x_4 равными нулю (т. е. предприятие ничего не выпускает), получим базисное решение (***0***; ***0***; ***0***; ***0***; ***1000***; ***600***; ***150***), которое является допустимым. При этом базисном решении функция $F = 0$, что, очевидно, не является ее максимальным значением.

От первого допустимого базисного решения нужно перейти к другому, при котором значение целевой функции увеличится. Значение целевой функции возрастает при увеличении значений переменных x_1, x_2, x_3, x_4. Поэтому эти переменные невыгодно считать неосновными, т. е. равными нулю, их нужно перевести в основные, что будет означать переход к новому базису. На каждом шаге симплексного метода допустим перевод в число основных только одной из свободных переменных.

Переведем в число основных переменную x_1, так как она входит в выражение целевой функции с наибольшим коэффициентом.

Как только одна из неосновных переменных переходит в число основных, так одна из основных переменных должна быть переведена вместо нее в число неосновных. Какую переменную перевести в неосновные?

Для максимизации функции F, нужно сделать значение x_1 как можно больше. Но увеличение x_1 может продолжаться до тех, пока не нарушается требование неотрицательности переменных.

Запишем условия неотрицательности переменных (x_1 – переходит в основные; x_2, x_3, x_4, как неосновные переменные – остаются равными нулю)

$$\begin{cases} x_5 = 1000 - 5x_1 \geq 0, \\ x_6 = 600 - 4x_1 \geq 0, \\ x_7 = 150 - x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства следует, что $x_1 \leq 200$; из второго $x_1 \leq 150$; из третьего $x_1 \leq 150$. Всем этим условиям удовлетворяет $x_1 \leq 150$. Значит в число неосновных переменных нужно перевести переменную, для которой $x_1 = \min\{200; 150; 150\} = 150$.

При этом условии сразу две неосновные переменные, а именно x_6 и x_7 обращаются в нуль. Любую из них можно перевести в неосновные. Переведем в неосновные переменные x_7.

<u>II шаг</u>. ***Основные переменные*** x_1, x_5, x_6; ***неосновные*** – x_2, x_3, x_4, x_7.

Выразим основные переменные этого шага и функцию F через неосновные.

Третье уравнение будем называть разрешающим. Выделим его и выразим из этого уравнения переменную x_1:

$$x_1 = 150 - 2x_3 - x_4 - x_7.$$

Подставляя это выражение x_1 в остальные уравнения и функцию F, получим

$$\begin{cases} x_1 = 150 - 2x_3 - x_4 - x_7, \\ x_5 = 250 - x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 5x_7, \\ \boxed{x_6 = 0 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 4x_7,} \end{cases}$$

$$F = 900 + 2x_2 - 9{,}5x_3 - 2x_4 - 6x_7.$$

Соответствующее базисное решение (***150***; ***0***; ***0***; ***0***; ***250***; ***0***; ***0***) – допустимое, вырожденное и значительно лучше, чем на первом шаге, так как $F = 900$. Но это решение не является оптимальным, поскольку в выражении функции F имеется переменная x_2, которая входит в нее с положительным коэффициентом.

Алгоритм симплексного метода предполагает обязательный перевод неосновной переменной в основные, если коэффициент перед ней в выражении целевой функции F, максимум которой ищется, положителен.

Таким образом переменная x_2 переводится в основные, неосновной переменной будет x_6, так как минимальное значение переменной x_2 получено из третьего уравнения ($x_2 = \min\{250; 0\}$).

<u>III шаг.</u> ***Основные переменные*** x_1, x_2, x_5; ***неосновные*** – x_3, x_4, x_6, x_7.

Выражаем основные переменные и функцию F через неосновные переменные.

Выделим третье уравнение и выразим из него x_2:

$$x_2 = 3x_3 + 1,5\,x_4 - 0,5\,x_6 + 2x_7\,.$$

Подставляя это выражение в остальные уравнения и функцию $\boldsymbol{F}$, получим

$$\begin{cases} \boxed{x_1 = 150 - 2x_3 - x_4 - x_7\,,} \\ x_2 = 0 + 3x_3 + 1,5\,x_4 - 0,5\,x_6 + 2x_7\,, \\ x_5 = 250 + 7x_3 + 1,5\,x_4 + 0,5x_6 + 3x_7, \end{cases}$$
$$F = 900 - 3,5x_3 + x_4 - x_6 - 2x_7.$$

Базисное решение этого шага (***150***; ***0***; ***0***; ***0***; ***250***; ***0***; ***0***) – допустимое, вырожденное но не оптимальное, так как в целевую функцию $\boldsymbol{F}$ входит переменная $\boldsymbol{x_4}$ с положительным коэффициентом. Переводим эту переменную в основные.

На этом шаге переменная $\boldsymbol{x_4}$ входит во второе и третье уравнения с положительными коэффициентами и, потому, не лимитируется этими двумя уравнениями.

В случаях, когда в каком–либо уравнении свободный член и коэффициент при переменной, переводимой в основные, одного знака (оба положительны или оба отрицательны), их отношение принимаем равным ∞***. Таким же символом будем обозначать отношение в том случае, если в соответствующее уравнение эта переменная вообще не входит.***

Таким образом, имеем $\boldsymbol{x_4 = \min\{150;\ \infty;\ \infty\} = 150}$. И при $\boldsymbol{x_4 = 150}$ переменная $\boldsymbol{x_1}$ переходит в неосновные.

<u>IV шаг.</u> ***Основные переменные*** $\boldsymbol{x_2, x_4, x_5}$; ***неосновные –*** $\boldsymbol{x_1, x_3, x_6, x_7}$.

Основные переменные этого шага и функцию $\boldsymbol{F}$ выражаем через неосновные.

После соответствующих подстановок и преобразований получим следующее:

$$\begin{cases} x_2 = 225 - 1,5x_1 - 0,5x_6 + 0,5x_7\,, \\ x_4 = 150 - x_1 - 2x_3 - x_7\,, \\ x_5 = 475 - 1,5x_1 + 4x_3 + 0,5x_6 + 1,5x_7, \end{cases}$$
$$F = 1050 - x_1 - 5,5x_3 - x_6 - 3x_7.$$

Так как в выражение целевой функции все переменные входят с отрицательными коэффициентами, то никакое увеличение функции за счет этих переменных невозможно.

Отсутствие на каком–либо шаге симплексного метода в выражении целевой функции F, максимум которой ищется, неосновных переменных с положительными коэффициентами является <u>критерием оптимальности.</u>

На четвертом шаге критерий оптимальности выполнен, и задача решена. Оптимальным будет решение (**0**; **225**; **0**; **150**; **475**; **0**; **0**), при котором $F_{max} = 1050$. Т. е. для получения наибольшей прибыли, равной **1050** денежным единицам предприятие должно выпустить **225** ед. продукции P_2, **150** ед. продукции вида P_4 (продукцию P_1 и P_3 в данных условиях вообще не выгодно производить). При этом сырье S_2 и S_3 будет использовано полностью, а **475** ед. сырья типа S_1 останется неизрасходованным.

Задача из задания № 3 может быть решена с помощью симплексных таблиц.

Решить задачу линейного программирования с помощью симплексных таблиц.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0.$$

Целевую функцию представим в виде $F - 2x_1 - 3x_2 = 0$ и приведем задачу к каноническому виду

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + x_6 = 21. \end{cases}$$

Заполним первую симплексную таблицу, в которой переменные x_3, x_4, x_5, x_6 основные.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	18	1	3	1	0	0	0	18/3
x_4	16	2	1	0	1	0	0	16
x_5	5	0	1	0	0	1	0	5
x_6	21	3	0	0	0	0	1	∞
F	0	–2	–3	0	0	0	0	

Проверяем критерий оптимальности. В последней строке имеются отрицательные коэффициенты. Выбираем из них наибольший по модулю (**– 3**); второй столбец разрешающий, переменная x_2 перейдет в основные.

Находим оценочные отношения: $x_2 = \min\{18/3;\ 16;\ 5;\ \infty\} = 5$. Третья строка разрешающая. На пересечении разрешающих строки и столбца находится разрешающий элемент $a_{33} = 1$.

Строим новую таблицу. В новом базисе основные переменные x_3, x_4, x_2, x_6 . Столбцы, соответствующие основным переменным, заполняем нулями и единицами. В последней строке против всех основных переменных проставляем нули. Третья строка получается делением на разрешающий элемент $a_{33} = 1$. Остальные клетки заполняем по правилу прямоугольника.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	3	1	0	1	0	–3	0	3
x_4	11	2	0	0	1	–1	0	11/2
x_2	5	0	1	0	0	1	0	∞
x_6	21	3	0	0	0	0	1	7
F	15	–2	0	0	0	3	0	

Критерий оптимальности вновь не выполнен. Строим следующую таблицу.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	3	1	0	1	0	–3	0	∞
x_4	5	0	0	–2	1	5	0	1
x_2	5	0	1	0	0	1	0	5
x_6	12	0	0	–3	0	9	1	12/9
F	21	0	0	2	0	–3	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	6	1	0	–1/5	3/5	0	0	
x_5	1	0	0	–2/5	1/5	1	0	
x_2	4	0	1	2/5	–1/5	0	0	
x_6	3	0	0	3/5	–9/5	0	1	
F	24	0	0	4/5	3/5	0	0	

Критерий оптимальности выполнен, значит F_{max} = 24, оптимальное базисное решение (***6***; ***4***; ***0***; ***0***; ***1***; ***3***).

<u>Задание 4.</u> Решить задачу линейного программирования симплексным методом. Для нахождения начального опорного плана воспользоваться методом искусственного базиса.

$$F = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -1, \\ x_1 - x_2 \ge -3, \\ x_1 \quad\quad \le \ \ 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Приведем задачу к каноническому виду.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -3, \\ x_1 \quad\quad + x_5 = \ \ 3. \end{cases}$$

(***0***; ***0***; ***– 1***; ***3***; ***5***) – недопустимое базисное решение с одной отрицательной компонентой, поэтому в первое уравнение введем искусственную переменную y_1 с тем же знаком, что и свободный член:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - y_1 = -1, \\ x_1 - x_2 \quad - x_4 = -3, \\ x_1 \quad + x_5 = 3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 1, \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 = 3, \\ x_1 \quad + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$T = x_1 + 2x_2 - My_1 \rightarrow max.$$

Составляем первую симплексную таблицу.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	
y_1	1	–1	1	–1	0	0	1	1
x_4	3	–1	1	0	1	0	0	3
x_5	3	1	0	0	0	1	0	∞
F	0	–1	–2	0	0	0	0	***max***
$-M_ф$	$-M$	M	$-M$	M	**0**	**0**	$-M$	***max***

Последнюю строку заполняем, умножая строку y_1 на коэффициент (**–** M). Проверяя выполнение критерия оптимальности при отыскании максимума (**–** M) – функции, определяем, что в последней строке имеется отрицательный элемент во втором столбце; значит он является разрешающим, переменная x_2 переходит в основные. Минимальное оценочное отношение в первой строке – она разрешающая. Переменная y_1 переходит в неосновные, обращается в нуль в следующем базисном решении и далее исключается из рассмотрения.

Базис	Свободный член	Переменные					Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	–1	1	–1	0	0	
x_4	2	0	0	1	1	0	
x_5	3	1	0	0	0	1	
F	2	–3	0	–2	0	0	***max***
$-M_ф$	0	0	0	0	0	0	***max***

Последняя строка показывает, что критерий оптимальности выполнен; $(-\,M_{ф}) = 0$, а значит и $M_{ф} = 0$, далее эту строку можно не рассматривать. Получено допустимое базисное решение $(0;\ 1;\ 0;\ 2;\ 3)$, начиная с которого решаем исходную задачу в соответствии с обычным алгоритмом.

Замечание. При решении задачи на отыскание минимума линейной функции рекомендуется вместо F_{max} находить $(-\,F_{min})$.

Задание 5. Однородный груз сосредоточен у трех поставщиков A_1, A_2, A_3 в объемах a_1, a_2, a_3 соответственно. Данный груз необходимо доставить четырем потребителям B_1, B_2, B_3, B_4 потребности которых составляют b_1, b_2, b_3, b_4 соответственно. Стоимости перевозок единицы груза от i – го поставщика к j – му потребителю ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$) c_{ij} заданы матрицей C. Требуется составить такой план перевозок, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальны.

$a_1 = 60$, $a_2 = 120$, $a_3 = 100$,

$b_1 = 20$, $b_2 = 110$, $b_3 = 40$, $b_4 = 110$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Суммарные запасы поставщиков равны ***60 + 120 + 100 = 280*** ед., суммарные потребности составляют ***20 + 110 +40 +110 = 280*** ед.

Поскольку суммарные запасы равны суммарным потребностям, имеем закрытую модель транспортной задачи.

Как и для других задач линейного программирования, поиск оптимального решения транспортной задачи начинают с нахождения опорного плана или первоначального базисного распределения поставок.

Существует несколько схем построения первоначального опорного плана. Рассмотрим два из них: метод северо–западного угла и метод наименьшей стоимости.

Примечание. При выполнении контрольного задания, первоначальный опорный план можно находить любым из рассмотренных методов.

Метод северо–западного угла.

Запишем условия задачи в виде таблицы.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B₁ = 20	***B₂ = 20***	***B₃ = 20***	***B₄ = 20***	
$A_1 = 20$	**1** x_{11}	**2** x_{12}	**5** x_{13}	**3** x_{14}	***60***
$A_2 = 20$	**1** x_{21}	**6** x_{22}	**5** x_{23}	**2** x_{24}	***120***
$A_3 = 20$	**6** x_{31}	**3** x_{32}	**7** x_{33}	**4** x_{34}	***100***
Потребности	***20***	***110***	***40***	***110***	

Дадим в «северо-западный» угол таблицы, т. е. зададим переменной x_{11}, максимально возможное значение или максимально возможную поставку: $x_{11} = min\ \{60, 20\} = 20$. После этого спрос 1-го потребителя будет полностью удовлетворен, в результате чего первый столбец таблицы поставок выпадает из последующего рассмотрения.

Далее в таблице найдем новый «северо-западный» угол – клетку (1, 2) и дадим в нее максимально возможное значение. Учитывая, что первый поставщик уже отдал ***20*** единиц груза и у него осталось только ***40***, получаем, что $x_{12} = min\ \{40, 110\} = 40$. После этого мощность 1-го поставщика полностью реализована и из рассмотрения выпадает первая строка таблицы. В оставшейся таблице снова находим «северо-западный» угол и т. д. В результате получаем следующее исходное распределение поставок.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B₁ = 20	***B₂ = 20***	***B₃ = 20***	***B₄ = 20***	
$A_1 = 20$	**1** ***20***	**2** ***40***	**5**	**3**	***60***
$A_2 = 20$	**1**	**6** ***70***	**5** ***40***	**2** ***10***	***120***
$A_3 = 20$	**6**	**3**	**7**	**4** ***100***	***100***
Потребности	***20***	***110***	***40***	***110***	

Недостатком метода «северо-западного» угла является то, что он не учитывает значения коэффициентов затрат задачи, поэтому построенный опорный план далек от оптимального. Этого недостатка лишен следующий метод.

Метод наименьших затрат.

Найдем в таблице поставок клетки с наименьшим коэффициентом затрат. Таких клеток две: (1, 1) и (2, 1) с коэффициентами затрат равными $\boldsymbol{1}$. Сравним максимально возможные поставки для этих клеток: для клетки (1, 1) $\boldsymbol{x_{11} = min\ \{60, 20\} = 20}$, для клетки $(\boldsymbol{2, 1})$ – $\boldsymbol{x_{21} = min\ \{120, 20\} = 20}$. Так как они совпадают, то максимально возможную поставку даем в любую из них например в клетку (2, 1). В результате спрос первого потребителя удовлетворен и первый столбец выпадает из рассмотрения.

В оставшейся таблице наименьшим коэффициентом затрат обладают две клетки: (1, 2) и (2, 4). Сравним максимально возможные поставки для этих клеток: для клетки (1, 2) – $\boldsymbol{x_{12} = min\ \{60, 110\} = 60}$; для клетки (2, 4) – $\boldsymbol{x_{24} = min\ \{120 - 20, 110\} = 100}$. Даем поставку в клетку (2, 4), в которой максимально возможная поставка оказалась больше: $\boldsymbol{x_{24} = 100}$. При этом из рассмотрения выпадает вторая строка таблицы поставок.

Продолжая аналогичным образом заполнение таблицы, получим

Поставщики	Потребители			
	$B_1 = 20$	$B_2 = 110$	$B_3 = 40$	$B_4 = 110$
$A_1 = 60$	1	2 60	5	3
$A_2 = 120$	1 20	6	5	2 100
$A_3 = 100$	6	3 50	7 40	4 10

Сравним найденное распределение поставок с распределением, полученным методом «северо-западного» угла. Вычислим для каждого из этих распределений суммарные затраты. В первом случае $\boldsymbol{F_0 = 1\cdot20 + 2\cdot40 + 6\cdot70 + 5\cdot40 + 2\cdot10 + 4\cdot100 = 1140}$; во втором – $\boldsymbol{F_0 = 1\cdot20 + 2\cdot60 + 3\cdot50 + 2\cdot100 + 7\cdot40 + 4\cdot10 = 810}$.

Суммарные затраты в случае нахождения опорного плана методом «северо-западного» угла больше, чем в случае метода наименьших затрат. Таким образом, во втором случае мы находимся ближе (по числу необходимых шагов) к оптимуму, чем в первом.

Далее, при решении задачи, будем использовать опорный план, полученный методом наименьшей стоимости.

Для выяснения, является ли найденный план оптимальным, воспользуемся методом потенциалов, алгоритм которого приведен ниже.

Метод потенциалов.

1. ***Построение системы потенциалов***.

Для построения системы потенциалов используем условие $u_i + v_j = c_{ij}$.

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного опорного плана[1]. Такой план содержит $m + n - 1$ занятых клеток, поэтому для него можно составить систему из $m + n - 1$ линейно-независимых уравнений вида $u_i + v_j = c_{ij}$ с $m + n$ неизвестными. Уравнений на одно меньше, чем неизвестных, поэтому система является неопределенной и одному неизвестному (обычно u_1) придают нулевое значение. После этого остальные потенциалы определяются однозначно. Если известен потенциал u_i, то $v_j = c_{ij} - u_i$. Если известен потенциал v_j, то $u_i = c_{ij} - v_j$. Таким образом, для определения неизвестного потенциала от величины c_{ij} занятой клетки следует вычесть известный потенциал.

После определения всех потенциалов нужно проверить правильность построения системы. Для этого просматриваем занятые клетки и для каждой из них проверяем выполнение равенства $u_i + v_j = c_{ij}$. Если для всех занятых клеток равенство выполняется, то система построена верно, в противном случае ее надо построить заново или изменить так, чтобы условие выполнялось.

2. ***Проверка выполнения условия оптимальности для незанятых клеток***.

Просматриваем строки и для каждой незанятой клетки проверяем выполнение условия $u_i + v_j \le c_{ij}$, т. е. суммируем потенциалы, на пересечениях которых стоит незанятая клетка, сумму сравниваем со стоимостью, стоящей в ней. Если для всех незанятых клеток $u_i + v_j \le c_{ij}$, то план оптимальный. Если для некоторых клеток $u_i + v_j > c_{ij}$, то план является неоптимальным. Для каждой такой клетки находим величину разности $(u_i + v_j) - c_{ij} > 0$ и записываем ее значение в правый нижний угол этой же клетки.

---

[1] Если получен вырожденный опорный план, т. е. число занятых клеток меньше чем $m + n - 1$, то в недостающие клетки необходимо вписать нулевое количество груза.

3. ***Выбор клетки, в которую нужно послать перевозку***.

В первую очередь загрузке подлежит клетка, которой соответствует $max\ [(u_i + v_j) - c_{ij}]$.

4. ***Построение цикла и определение величины перераспределения груза***.

Циклом называют ломаную с вершинами в клетках и звеньями, лежащими вдоль строк и столбцов, удовлетворяющую условиям:

- ломаная должна быть связной, т. е. из любой ее вершины можно попасть в другую вершину по звеньям ломаной;
- в каждой вершине ломаной встречаются два звена, одно из которых располагается по строке, другое – по столбцу.

Циклом пересчета называется такой цикл в таблице, при котором одна из его вершин лежит в свободной клетке, остальные – в заполненных. Цикл пересчета называется ***означенным***, если в его вершинах расположены знаки « + » и « – », так, что в свободной клетке стоит знак « + », а соседние вершины имеют противоположные знаки.

Для определения количества единиц груза, подлежащих перераспределению, отмечаем знаком « + » свободную клетку, которую надо загрузить. Строим цикл пересчета и, начиная движение от клетки, отмеченной знаком « + », поочередно проставляем знаки « – » , « + » в вершинах ломаной. Затем находим $\boldsymbol{m = \min x_{ij}}$, где $\boldsymbol{x_{ij}}$ – перевозки, стоящие в вершинах цикла, отмеченных знаком « – ». Эта величина определяет, сколько единиц груза можно перераспределить по найденному циклу. Значение $\boldsymbol{m}$ записываем в незанятую клетку, отмеченную знаком « + », двигаясь по циклу, вычитаем его из объемов перевозок, расположенных в минусовых клетках, и прибавляем к объемам перевозок в плюсовых клетках. Если значению $\boldsymbol{m}$ соответствуют несколько перевозок, то при вычитании оставляем в соответствующих клетках нулевые перевозки в таком количестве, чтобы во вновь полученном опорном плане занятых клеток было $\boldsymbol{m + n - 1}$.

5. В результате перераспределения получится новый опорный план, который снова подлежит проверке на оптимальность. Для этого нужно вновь построить систему потенциалов и проверить выполнение условия оптимальности для каждой незанятой клетки. Если полученный план снова окажется неоптимальным, то возвращаемся к пункту 3. Процесс повторяется до тех пор, пока все незанятые клетки не будут удовлетворять условию $u_i + v_j \le c_{ij}$.

6. После того, как будет найден оптимальный план, найдем стоимость перевозок по формуле $F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^{*}$.

Построим систему потенциалов для нашей задачи.

Методом наименьшей стоимости был получен невырожденный опорный план, в котором число занятых клеток равно $\boldsymbol{3 + 4 - 1 = 6}$, и поэтому для него можно составить систему из шести уравнений вида $u_i + v_j = c_{ij}$ с семью неизвестными:

$$\boldsymbol{u_1 + v_1 = 2};\ \boldsymbol{u_2 + v_1 = 1};\ \boldsymbol{u_2 + v_4 = 2};\ \boldsymbol{u_3 + v_2 = 3};\ \boldsymbol{u_3 + v_3 = 7};\ \boldsymbol{u_3 + v_4 = 4}.$$

Поскольку количество неизвестных на единицу превышает число уравнений в системе, то одно из неизвестных (в данном случае $\boldsymbol{u_3}$) приравняем к нулю, т. е. $\boldsymbol{u_3 = 0}$. Тогда потенциалы остальных строк и столбцов из полученной системы определяются однозначно:

$$\boldsymbol{u_1 = -1};\ \boldsymbol{u_2 = -2};\ \boldsymbol{v_1 = 3};\ \boldsymbol{v_2 = 3};\ \boldsymbol{v_3 = 7};\ \boldsymbol{v_4 = 4}.$$

Проверим, выполняются ли условия оптимальности для незанятых клеток. Просматриваем строки и для каждой незанятой клетки проверяем выполнение условия $u_i + v_j \le c_{ij}$. В нашем случае это условие не выполняется для клеток (1, 1) и (1, 3) т. е. план не является оптимальным.

Величина разности $(u_i + v_j) - c_{ij}$ в этих клетка одинакова и равна ***1*** [$\boldsymbol{(-1 + 3) - 1 = 1}$ – для клетки (1, 1); $\boldsymbol{(-1 + 7) - 5 = 1}$ – для клетки (1, 3)]. Запишем ее значение в правый нижний угол каждой из этих клеток.

Поскольку найденный план не является оптимальным, то его можно улучшить пересчетом по циклу, соответствующему одной из клеток, в которых не выполнено условие оптимальности. Причем, в первую очередь загрузке подлежит клетка, которой соответствует $max\ [(u_i + v_j) - c_{ij}]$.

В нашем случае обе разности имеют одинаковые значения, поэтому цикл можно строить по любой из клеток.

Построим цикл по клетке (1, 3). С этой клеткой будет совпадать одна из вершин ломаной линии, другие ее вершины должны совпадать с клетками занятыми. Такими будут клетки (1, 2); (3, 2); (3, 3). Проставим знаки « + » и « – » так, что в клетке (1, 3) будет стоять знак « + », а соседние вершины будут иметь противоположные знаки.

Определим количество единиц груза, подлежащих перераспределению по циклу, выбирая из «минусовых» клеток ту, в которой количество груза наименьшее. В клетке (1, 2) ***60*** ед. груза, в клетке (3, 3) – ***40*** ед., таким образом, по найденному циклу должно быть перераспределено ***40*** ед. груза.

Матрица планирования		Потребители			
		***B*₁ = 20**	***B*₂ = 110**	***B*₃ = 40**	***B*₄ = 110**
Поставщики	Потенциалы	$v_1 = 3$	$v_2 = 3$	$v_3 = 7$	$v_4 = 4$
***A*₁= 60**	$u_1 = -1$	**1** $\boxed{1}$	**2** – **60**	**5** + $\boxed{1}$	**3**
***A*₂= 120**	$u_2 = -2$	**1** **20**	**6**	**5**	**2** **100**
***A*₃= 100**	$u_3 = 0$	**6**	**3** + **50**	**7** – **40**	**4** **10**

Запишем их в незанятую клетку, отмеченную знаком « + », далее двигаясь по циклу, вычтем из объемов перевозок, расположенных в «минусовых» клетках, и прибавим к объемам перевозок в «плюсовых» клетках.

В результате получим новый план перевозок, который также подлежит проверке на оптимальность.

		$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 5$	$v_4 = 3$
***A*₁= 60**	$u_1 = 0$	**1** + $\boxed{1}$	**2** – **20**	**5** **40**	**3**
***A*₂= 120**	$u_2 = -1$	**1** **20**	**6**	**5**	**2** + **100**
***A*₃= 100**	$u_3 = 1$	**6**	**3** + **90**	**7**	**4** – **10**

Построив систему потенциалов для этого плана, увидим, что для клетки (1, 1) условие оптимальности не выполнено, поэтому для этой клетки снова строим цикл пересчета. Перераспределив по циклу ***10*** ед. груза, получим следующий план перевозок. Построив систему потенциалов, увидим, что для всех свободных клеток критерий оптимальности выполнен, поэтому полученный план является оптимальным. Однако, не единственным, так как неравенство $u_i + v_j \le c_{ij}$ не для всех свободных клеток выполняется как строгое [так для клетки (2, 3) имеем: ***0 + 5 = 5***].

		$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 5$	$v_4 = 2$
$A_1 = 60$	$u_1 = 0$	1 / 10	2 / 10	5 / 40	3
$A_2 = 120$	$u_2 = 0$	1 / 10	6	5	2 / 110
$A_3 = 100$	$u_3 = 1$	6	3 / 100	7	4

Затраты на перевозки по найденному оптимальному плану составляют

$$F_{min} = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 110 + 3 \cdot 100 = 760 \text{ ден. ед.}$$

Сравнивая этот результат с тем, что был получен после построения первоначального опорного плана методом наименьшей стоимости, увидим, что выигрыш от улучшения опорного плана составил $F_0 - F_{min} = 810 - 760 = 50$ ден. ед.

Вторая задача задания 5 содержит открытую модель транспортной задачи, поскольку суммарные запасы не совпадают с суммарными потребностями. Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

При этом возможны два случая:

1) суммарные запасы превышают суммарные потребности, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$;

2) суммарные потребности превышают суммарные запасы, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

В первом случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится фиктивный потребитель B_{n+1} , потребности которого составляют $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Во втором случае, вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запасы которого равны $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Стоимость перевозки единицы груза, как до фиктивного потребителя, так и от фиктивного поставщика полагают равной нулю, так как груз в обоих случаях не перевозится.

После преобразований задача принимает вид закрытой модели и решается обычным способом.