



## **МЧС РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

«Уральский институт Государственной противопожарной службы  
Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны,  
чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий»

### **ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**

Методические указания и варианты контрольной работы № 1  
для слушателей 1 года обучения факультетов заочного обучения  
и платных образовательных услуг Уральского института ГПС МЧС России

Специальность 280705 (20.05.01) Пожарная безопасность

Екатеринбург  
2015

**Высшая математика** [Текст]: методические указания и варианты контрольной работы № 1 для слушателей 1 года обучения факультетов заочного обучения и платных образовательных услуг Уральского института ГПС МЧС России. Специальность 280705 (20.05.01) Пожарная безопасность / сост. С. А. Худякова, Г. В. Ваганова, Т. Б. Ванеева, Е. В. Карпова. – Екатеринбург : ФГБОУ ВПО Уральский институт ГПС МЧС России, 2015. – 57 с.

*Составители:* Худякова С. А., начальник кафедры математики и информатики Уральского института ГПС МЧС России, кандидат педагогических наук;

Ваганова Г. В., кандидат педагогических наук;

Ванеева Т. Б., доцент кафедры математики и информатики Уральского института ГПС МЧС России, кандидат педагогических наук;

Карпова Е. В., доцент кафедры математики и информатики Уральского института ГПС МЧС России, кандидат педагогических наук.

*Рецензент:* Баранова О. Ю., доцент кафедры физики и теплообмена Уральского института ГПС МЧС России, кандидат технических наук.

Пособие содержит варианты контрольной работы № 1 и указания по их выполнению по темам дисциплины «Высшая математика»: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии; введение в математический анализ; дифференциальное исчисление функции одной переменной; теория функции комплексного переменного; интегральное исчисление функции одной переменной; функции нескольких переменных.

Методические указания предназначены для слушателей 1 курса обучения факультетов заочного обучения и платных образовательных услуг Уральского института ГПС МЧС России.

Одобрено на заседании методического совета Уральского института ГПС МЧС России

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| Введение.....                                                 | 4  |
| Список рекомендуемой литературы.....                          | 5  |
| Требования к выполнению и оформлению контрольной работы ..... | 7  |
| Варианты контрольной работы.....                              | 8  |
| Указания к выполнению контрольной работы № 1 .....            | 10 |
| Задания контрольной работы № 1 .....                          | 44 |

## **ВВЕДЕНИЕ**

Данные методические указания составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Высшая математика» и предназначены для слушателей 1 курса факультетов заочного обучения и платных образовательных услуг, обучающихся по специальности 280705 (20.05.01) Пожарная безопасность. Методические указания содержат краткие теоретические сведения по основным разделам курса и подробное решение типовых задач для самостоятельной подготовки к выполнению контрольной работы № 1.

### **Компетенции, формируемые в результате освоения учебной дисциплины:**

1. Способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат (ОК-4);
2. Способность к познавательной деятельности (к абстрагированию, анализу и синтезу, критическому мышлению, обобщению, принятию нестандартных решений, разрешению проблемных ситуаций, резюмированию и аргументированному отстаиванию своих решений) (ОК-8);
3. Готовность к саморазвитию, самообразованию (ОК-14).

Контрольная работа № 1 включает в себя практические задания по темам:

1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.
2. Введение в математический анализ.
3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.
5. Теория функции комплексного переменного.
6. Интегральное исчисление функции одной переменной.
7. Функции нескольких переменных.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная литература

1. Ильин, В. А. Высшая математика [Текст] : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Проспект, 2014. – 608 с.
2. Журбенко, Л. Н. Математика в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие / Л. Н. Журбенко, Г. А. Никонова, Н. В. Никонова, С. Н. Нуриева, О. М. Дегтярева. – М. : ИНФРА-М, 2011. – 372 с.
3. Краснов, М. Л. Вся высшая математика [Текст] : в 7 т. / М. Л. Краснов. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. Т. 1 : Аналитическая геометрия, векторная алгебра, линейная алгебра, дифференциальное исчисление. – 2014. – 336 с.
4. Краснов, М. Л. Вся высшая математика [Текст] : в 7 т. / М. Л. Краснов. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. Т. 2 : Интегральное исчисление. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Дифференциальная геометрия. – 2014. – 192 с.

### Дополнительная литература

5. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике [Текст] : учеб. пособие / В. С. Шипачев. – 9-е изд. – М. : Высшая школа, 2009. – 304 с.
6. Баврин, И. И. Высшая математика [Текст] : учебник для студентов естественнонаучных специальностей педагогических вузов / И. И. Баврин. – 2-е изд., стер. – М. : Изд. центр «Академия»; Высшая школа, 2001. – 616 с.
7. Беклемишева, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособие / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Д. В. Беклемишева – 2-е изд., перераб. – М. : Физматлит, 2003. – 496 с.
8. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I. [Текст] : учеб. пособие для вузов в 2-х ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : Изд-во «Мир и Образование», 2007. – 304 с.
9. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс [Текст] : учеб. пособие / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 9-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2011. – 576 с.
10. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс [Текст] : учеб. пособие / Д. Т. Письменный. – 11-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2013. – 608 с.
11. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. [Текст] : учебник для вузов в 2-х т. / Н. С. Пискунов. – М. : Интеграл – Пресс, 2004. Т. 1. / Н. С. Пискунов. – 2004. – 416 с.

12. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст] : учеб. пособие / В. С. Шипачев. – 6-е изд. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.

## **ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

Слушатели выполняют контрольную работу в соответствии с учебным рабочим планом в сроки, установленные графиками учебного процесса.

Слушатели должны выполнить один из 100 вариантов, номер которого определяется **по двум последним цифрам** номера зачетной книжки.

**Контрольная работа выполняется в отдельной тетради в клеточку ручкой любого цвета, кроме зеленого и красного, аккуратно и разборчивым почерком, чертежи выполняются простым карандашом с использованием чертежных инструментов.**

На титульном листе следует указать фамилию, имя, отчество, должность и звание слушателя, его адрес с указанием почтового индекса, номер зачетной книжки, номер варианта, номер группы.

Задания контрольной работы выполняются по порядку, согласно расположению их в варианте.

На заключительном листе контрольной работы следует указать список литературы, который был использован при ее выполнении.

Если контрольная работа выполнена с нарушением всех вышеперечисленных указаний или не полностью, то она возвращается слушателю для доработки без проверки.

Если работа не зачтена, следует внимательно изучить все замечания рецензента и выполнить работу над ошибками в соответствии с рекомендациями.

Работу над ошибками представляют на проверку вместе с незачтенной работой.

## ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

| №<br>варианта | № задания                           | №<br>варианта | № задания                          |
|---------------|-------------------------------------|---------------|------------------------------------|
| 00            | 1, 50, 74, 98, 122, 146, 170, 176   |               |                                    |
| 01            | 2, 26, 75, 99, 123, 147, 171, 177   | 02            | 3, 27, 51, 100, 124, 148, 172, 178 |
| 03            | 4, 28, 52, 76, 125, 149, 173, 179   | 04            | 5, 29, 53, 77, 101, 150, 174, 180  |
| 05            | 6, 30, 54, 78, 102, 126, 175, 181   | 06            | 7, 31, 55, 79, 103, 127, 151, 182  |
| 07            | 8, 32, 56, 80, 104, 128, 152, 183   | 08            | 9, 33, 57, 81, 105, 129, 153, 184  |
| 09            | 10, 34, 58, 82, 106, 130, 154, 185  | 10            | 11, 35, 59, 83, 107, 131, 155, 186 |
| 11            | 12, 36, 60, 84, 108, 132, 156, 187  | 12            | 13, 37, 61, 85, 109, 133, 157, 188 |
| 13            | 14, 38, 62, 86, 110, 134, 158, 189  | 14            | 15, 39, 63, 87, 111, 135, 159, 190 |
| 15            | 16, 40, 64, 88, 112, 136, 160, 191  | 16            | 17, 41, 65, 89, 113, 137, 161, 192 |
| 17            | 18, 42, 66, 90, 114, 138, 162, 193  | 18            | 19, 43, 67, 91, 115, 139, 163, 194 |
| 19            | 20, 44, 68, 92, 116, 140, 164, 195  | 20            | 21, 45, 69, 93, 117, 141, 165, 196 |
| 21            | 22, 46, 70, 94, 118, 142, 166, 197  | 22            | 23, 47, 71, 95, 119, 143, 167, 198 |
| 23            | 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 176  | 24            | 25, 49, 73, 97, 121, 145, 169, 177 |
| 25            | 1, 48, 51, 99, 101, 149, 151, 178   | 26            | 2, 48, 52, 98, 102, 148, 152, 179  |
| 27            | 3, 47, 53, 97, 103, 147, 153, 180   | 28            | 4, 46, 54, 96, 104, 146, 154, 181  |
| 29            | 5, 45, 55, 95, 105, 145, 155, 182   | 30            | 6, 44, 56, 94, 106, 144, 156, 183  |
| 31            | 7, 43, 57, 93, 107, 143, 157, 184   | 32            | 8, 42, 58, 92, 108, 142, 158, 185  |
| 33            | 9, 41, 59, 91, 109, 141, 159, 186   | 34            | 10, 40, 60, 90, 110, 140, 160, 187 |
| 35            | 11, 39, 61, 89, 111, 139, 161, 188  | 36            | 12, 38, 62, 88, 112, 138, 162, 189 |
| 37            | 13, 37, 63, 87, 113, 137, 163, 190  | 38            | 14, 36, 64, 86, 114, 136, 164, 191 |
| 39            | 15, 35, 65, 85, 115, 135, 165, 192  | 40            | 16, 34, 67, 84, 116, 134, 166, 193 |
| 41            | 17, 33, 67, 83, 117, 133, 167, 194  | 42            | 18, 32, 68, 82, 118, 132, 168, 195 |
| 43            | 19, 31, 69, 81, 119, 131, 169, 196  | 44            | 20, 30, 70, 80, 120, 130, 170, 197 |
| 45            | 21, 29, 71, 79, 121, 129, 171, 198  | 46            | 22, 28, 72, 78, 122, 128, 172, 199 |
| 47            | 23, 27, 73, 77, 123, 127, 173, 200  | 48            | 24, 26, 74, 76, 124, 126, 174, 177 |
| 49            | 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 176 | 50            | 1, 50, 51, 100, 101, 150, 151, 179 |
| 51            | 2, 49, 52, 99, 102, 149, 152, 178   | 52            | 3, 48, 53, 98, 103, 148, 153, 181  |
| 53            | 4, 47, 54, 97, 104, 147, 154, 180   | 54            | 5, 46, 55, 96, 105, 146, 155, 183  |
| 55            | 6, 45, 56, 95, 106, 145, 156, 182   | 56            | 7, 44, 57, 94, 107, 144, 157, 185  |
| 57            | 8, 43, 58, 93, 108, 143, 158, 184   | 58            | 9, 42, 59, 92, 109, 142, 159, 187  |
| 59            | 10, 41, 60, 91, 110, 141, 160, 186  | 60            | 11, 40, 61, 90, 111, 140, 161, 189 |
| 61            | 12, 39, 62, 89, 112, 139, 162, 188  | 62            | 13, 38, 63, 88, 113, 138, 163, 191 |
| 63            | 14, 37, 64, 87, 114, 137, 164, 190  | 64            | 15, 36, 65, 86, 115, 136, 165, 193 |
| 65            | 16, 35, 66, 85, 116, 135, 166, 192  | 66            | 17, 34, 67, 84, 117, 134, 167, 195 |
| 67            | 18, 33, 68, 83, 118, 133, 168, 194  | 68            | 19, 32, 69, 82, 119, 132, 169, 197 |
| 69            | 20, 31, 70, 81, 120, 131, 170, 196  | 70            | 21, 30, 71, 80, 121, 130, 171, 199 |



| №<br>варианта | № задания                          | №<br>варианта | № задания                          |
|---------------|------------------------------------|---------------|------------------------------------|
| 71            | 22, 29, 72, 79, 122, 129, 172, 198 | 72            | 23, 28, 73, 78, 123, 128, 173, 177 |
| 73            | 24, 27, 74, 77, 124, 127, 174, 180 | 74            | 25, 26, 75, 76, 125, 126, 175, 178 |
| 75            | 1, 49, 72, 95, 118, 141, 164, 182  | 76            | 2, 50, 73, 96, 119, 142, 165, 179  |
| 77            | 3, 26, 74, 97, 120, 143, 166, 184  | 78            | 4, 27, 75, 98, 121, 144, 167, 181  |
| 79            | 5, 28, 51, 99, 122, 145, 168, 186  | 80            | 6, 29, 52, 100, 123, 146, 169, 183 |
| 81            | 7, 30, 53, 76, 124, 147, 170, 188  | 82            | 8, 31, 54, 77, 125, 148, 171, 185  |
| 83            | 9, 32, 52, 78, 101, 149, 172, 190  | 84            | 10, 33, 56, 79, 102, 150, 173, 187 |
| 85            | 11, 34, 57, 80, 103, 126, 174, 192 | 86            | 12, 35, 58, 81, 104, 127, 175, 189 |
| 87            | 13, 36, 59, 82, 105, 128, 151, 194 | 88            | 14, 37, 60, 83, 106, 129, 152, 191 |
| 89            | 15, 38, 61, 84, 107, 130, 153, 196 | 90            | 16, 39, 62, 85, 108, 131, 154, 193 |
| 91            | 17, 40, 63, 86, 109, 132, 155, 198 | 92            | 18, 41, 64, 87, 110, 133, 156, 195 |
| 93            | 19, 42, 65, 88, 111, 134, 157, 200 | 94            | 20, 43, 66, 89, 112, 135, 158, 197 |
| 95            | 21, 44, 67, 90, 113, 136, 159, 176 | 96            | 22, 45, 68, 91, 114, 137, 160, 199 |
| 97            | 23, 46, 69, 92, 115, 138, 161, 178 | 98            | 24, 47, 70, 93, 116, 139, 162, 177 |
| 99            | 25, 48, 71, 94, 117, 140, 163, 180 |               |                                    |

## УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

### Тема 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

1. Матрицы, операции над ними. Определители.

*Литература.* [2], Гл. I, § 1; [12], Гл. X, § 1, 2; [5], Гл. VII, § 1 разобрать пример 1; [7], Гл. VI, § 14-16; [8], Гл. IV, § 2 задачи 400-403; [9] Гл. I, § 1-4; [10], Гл. I, § 1-3.

2. Системы линейных уравнений. Правило Крамера.

*Литература.* [2], Гл. I, § 1; [12], Гл. X, § 3,4; [5], Гл. VII, § 2 разобрать примеры 1-2; [7], Гл. VII, § 17-19; [9], Гл. II, § 1-4; [10], Гл. I, § 4.

3. Векторы.

*Литература.* [10], Гл. II, § 5; [9], Гл. III, § 1; [12], Гл. III, § 1-4, Гл. IX, § 1-5; [5], Гл. III, § 1-4 задачи 1-5, 16-18, 22-24, 38-40, 42-47, Гл. X, § 1-3 задачи 6-14, 22-33; [2], Гл. I, § 2; [7], Гл. I, § 1.

4. Скалярное произведение векторов.

*Литература.* [10], Гл. II, § 6; [9], Гл. III, § 2; [12], Гл. IX, § 6; [5], Гл. X, § 4 задачи 41-51; [2], Гл. I, § 2; [7], Гл. I, § 2.

5. Векторное произведение векторов.

*Литература.* [10], Гл. II, § 7; [9], Гл. III, § 3; [12], Гл. IX, § 7; [5], Гл. X, § 5 задачи 63-73; [2], Гл. I, § 2; [7], Гл. I, § 3.

6. Смешанное произведение векторов.

*Литература.* [10], Гл. II, § 8; [9], Гл. III, § 4; [12], Гл. IX, § 8; [5], Гл. X, § 6 задачи 83-88, 98-100; [2], Гл. I, § 2; [7], Гл. I, § 3.

7. Линии на плоскости и в пространстве.

*Литература.* [10], Гл. III, § 9, 10; [9], Гл. IV, § 1, 2, Гл. V, § 3; [12], Гл. III, § 5, 6, Гл. IX, § 9-13; [5], Гл. III, § 5-7 задачи 52-54, 59-85, Гл. X, § 7-9 задачи 101-103, 114-122, 130-138, 153-162, 165-168, 172-181; [2], Гл. I, § 3; [7], Гл. II, § 5, 6.

### Краткий теоретический материал

**Определитель второго порядка** равен:  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$

**Определитель третьего порядка** равен:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix} = a \cdot m \cdot z + c \cdot d \cdot y + x \cdot b \cdot n - x \cdot m \cdot c - a \cdot n \cdot y - z \cdot b \cdot d.$$

**Сумма матриц** равна:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+m & d+n \end{pmatrix}.$

**Разность матриц** равна:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ c-m & d-n \end{pmatrix}.$

**Произведение матриц** равно:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot m & a \cdot y + b \cdot n \\ c \cdot x + d \cdot m & c \cdot y + d \cdot n \end{pmatrix}.$$

**Произведение матрицы на число:**  $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x & \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot m & \lambda \cdot n \end{pmatrix}.$

**Решение системы линейных уравнений методом Крамера:**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1; \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2; \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

**Координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ :**  $A(a;b), B(c;d), \overrightarrow{AB} = (c-a; d-b).$

**Разложение вектора по координатным ортам:**

$$\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x;y;z).$$

**Длина (норма) вектора  $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x;y;z)$ :**

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**Скалярное произведение векторов  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ :**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2, \quad \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

**Векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  называются ортогональными, если  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ .**

**Векторное произведение векторов  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ :**

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

**Длина векторного произведения векторов**  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ :  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \left( \overset{\wedge}{\angle} \vec{a}, \vec{b} \right)$  – площадь параллелограмма.

**Свойства векторного произведения векторов:**  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ,  $k \cdot \vec{a} \times d \cdot \vec{b} = k \cdot d \cdot \vec{a} \times \vec{b}$ .

**Векторы перпендикулярны:**  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ .

**Векторы коллинеарны:**  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda = \text{const}$ .

**Смешанное произведение векторов**  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$  и  $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$ :

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot x_1 - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot y_1 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot z_1,$$

$V_{\text{параллелепипеда}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$  – объем параллелепипеда,

$V_{\text{треугольной пирамиды}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$  – объем пирамиды.

**Уравнение прямой с угловым коэффициентом на плоскости:**  $y = kx + b$ , где  $k$  – угловой коэффициент прямой.

**Общее уравнение прямой на плоскости:**  $Ax + By + C = 0$ , где  $\vec{n} = (A; B)$  – нормальный (перпендикулярный) вектор прямой.

**Каноническое уравнение прямой на плоскости:**  $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ , где  $(x_0; y_0)$  – координаты точки, через которую проходит прямая и  $(a; b)$  – координаты направляющего (параллельного) вектора прямой.

**Уравнение прямой проходящей через две точки**  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  **на плоскости:**  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ .

**Уравнение прямой в отрезках на плоскости:**  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

**Каноническое уравнение прямой в пространстве:**  $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ , где  $(x_0; y_0; z_0)$  – координаты точки, через которую проходит прямая и  $(a; b; c)$  – координаты направляющего вектора прямой.

**Уравнение прямой проходящей через две точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  в пространстве:**  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ .

### Примеры решения типовых задач

**1.** Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

Найдем основной определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 18 - 8 + 3 + 3 = 12 \neq 0, \quad \text{значит, система}$$

уравнений невырожденная.

Найдем вспомогательные определители системы.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 - 2 + 54 - 24 + 15 + 3 = 36,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 12 + 30 - 4 - 18 + 5 = 24,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 5 + 6 - 20 + 1 - 18 = -24.$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{36}{12}; \\ x_2 = \frac{24}{12}; \\ x_3 = \frac{-24}{12}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

Проверка.

$$\begin{cases} 3+3\cdot 2+2\cdot(-2)=5; \\ 3+2\cdot 2+3\cdot(-2)=1; \\ 2\cdot 3-2-(-2)=6. \end{cases} \quad \begin{cases} 3+6-4=5; \\ 3+4-6=1; \\ 6-2+2=6. \end{cases} \quad \begin{cases} 5=5; \\ 1=1; \\ 6=6. \end{cases}$$

Ответ:  $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = -2$ .

2. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1 A_2 A_3 A_4$ :  
 $A_1(0; 2; -2), A_2(1; 0; -1), A_3(0; 5; -1), A_4(0; 2; 1)$ .

Найти:

- 1) длину ребра  $A_1A_2$ ;
- 2) угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$ ;
- 3) площадь грани  $A_1A_2A_3$ ;
- 4) объем пирамиды;
- 5) уравнение прямой  $A_1A_2$ .

1) Найти длину ребра  $A_1A_2$ .

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_1A_2}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ |\overrightarrow{A_1A_2}| &= \sqrt{(1-0)^2 + (0-2)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \text{ (ед)}. \end{aligned}$$

2) Найти угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$ .

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = |\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_4}| \cdot \cos \left( \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4} \right), \text{ откуда}$$

$$\cos \varphi = \frac{m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 + m_3 \cdot p_3}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}, \text{ где}$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (m_1; m_2; m_3) \text{ и } \overrightarrow{A_1A_4} = (p_1; p_2; p_3).$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1-0; 0-2; -1-(-2)) = (1; -2; 1) \text{ и}$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (0-0; 2-2; 1-(-2)) = (0; 0; 3),$$

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\text{значит, } \angle \varphi = \arccos \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

3) Найти площадь грани  $A_1A_2A_3$ .

Найдем векторное произведение векторов:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1; -2; 1) \text{ и } \overrightarrow{A_1A_3} = (0; 3; 1).$$

$$\begin{aligned} \vec{c} &= [\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}] = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-2-3)\vec{i} - (1-0)\vec{j} + (3-0)\vec{k} = -5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = (-5; -1; 3). \end{aligned}$$

Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, т. е.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{c}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{35}}{2} (ед^2).$$

4) Найти объем пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ .

Объем пирамиды равен одной шестой модуля смешанного произведения трех векторов, т. е.

$$V_{\text{треугольной пирамиды}} = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1A_3} \overrightarrow{A_1A_4}| = \frac{1}{6} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1; -2; 1); \overrightarrow{A_1A_3} = (0; 3; 1); \overrightarrow{A_1A_4} = (0; 0; 3).$$

$$\begin{aligned} V_{\text{треугольной пирамиды}} &= \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{A_1A_2} \overrightarrow{A_1A_3} \overrightarrow{A_1A_4}| = \frac{1}{6} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot |1 \cdot 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \cdot 3| = \frac{1}{6} \cdot |9 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0| = \\ &= \frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{3}{2} (ед^3). \end{aligned}$$

5) Составить уравнение прямой  $A_1A_2$ .

$\overrightarrow{A_1A_2} = (1; -2; 1)$  – направляющий вектор прямой  $(A_1A_2)$ , точка  $A_1(0; 2; -2)$  лежит на прямой. Тогда каноническое уравнение прямой  $(A_1A_2)$  имеет вид:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{1}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{1}.$$

## Тема 2. Введение в математический анализ

Функция, ее предел. Основные теоремы о пределах.

*Литература.* [11], Гл. I, § 6-9, Гл. II, § 1-7, 11; [10], Гл. V, § 14, 16, 17; [9], Гл. VI, § 1-4; [12], Гл. IV, § 1-6; [5], Гл. IV, § 1-3 задачи 15-38, 43-60, 62-71, 73-212, 213-222, 234-281, 329-376; [2], Гл. II, § 6,7.

### Краткий теоретический материал

#### **Теоремы о пределах:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot g(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

#### **Первый замечательный предел:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1.$$

#### **Второй замечательный предел:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x \right)^{\frac{1}{x}} = \left[ 1^\infty \right] = e \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \left[ 1^\infty \right] = e.$$

#### **Правила Лопиталя:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x)}.$$

### Примеры решения типовых задач

1. Вычислить пределы с использованием теорем о пределах.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x} \right) = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right) = 1 + 0 = 1;$$



$$\begin{aligned}
 2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 - x + 2) &= \lim_{x \rightarrow 1} 4x^3 - \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 2 = \\
 &= 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x^3 - \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 4 \cdot 1 - 1 + 2 = 5.
 \end{aligned}$$

**2.** Вычислить пределы с использованием методов раскрытия неопределенностей, а также теорем о пределах.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} &= \\
 &= \left[ \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 14x - 32) = 0, \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 6x + 8) = 0 \right] = \left[ \frac{0}{0} \right].
 \end{aligned}$$

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ , надо под знаком предела числитель и знаменатель разложить на множители и далее сократить их на общий множитель.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+16)}{(x-4)} = \frac{2+16}{2-4} = -9.$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1} = \left[ \frac{0}{0} \right].$$

Здесь мы также имеем неопределенность вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ .

Помножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю (избавляемся от иррациональности в числителе):

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - 3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+8-9}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+8} + 3} = \frac{1}{\sqrt{1+8} + 3} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right].$$

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ , надо под знаком предела числитель и знаменатель дроби разделить на переменную  $x$  с наивысшим показателем.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x}} =$$

Осталось воспользоваться теоремами о пределах, а также тем, что функции  $\frac{3}{x}; \frac{1}{x}; \frac{1}{x^2}$  – бесконечно малые функции при  $x \rightarrow \infty$ .

$$= \frac{-1 + 0 + 0}{2 + 0} = -\frac{1}{2}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + x - 1}{2x^2 - x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right].$$

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ , надо под знаком предела числитель и знаменатель дроби разделить на переменную  $x$  с наивысшим показателем, применить теоремы о пределах и учесть, что функции  $\frac{1}{x^3}; \frac{1}{x^4}; \frac{2}{x^2}$  – бесконечно малые функции при  $x \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + x - 1}{2x^2 - x} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x^4}{x^4} + \frac{x}{x^4} - \frac{1}{x^4}}{\frac{2x^2}{x^4} - \frac{x}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \\ &= \left[ \frac{-1 + 0 - 0}{0 - 0} = -\frac{1}{0} \right] = -\infty. \end{aligned}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{2x^4-x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right].$$

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ , надо под знаком предела числитель и знаменатель дроби разделить на переменную  $x$  с наивысшим показателем, применить теоремы о пределах и учесть, что функции  $\frac{1}{x^3}; \frac{1}{x^4}$  – бесконечно малые функции при  $x \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+1}{2x^4-x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4} - \frac{x}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{2 - \frac{1}{x^3}} = \left[ \frac{-0+0}{2-0} = \frac{0}{2} \right] = 0.$$

**3. Вычислить пределы с помощью замечательных пределов.**

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right].$$

Помножим числитель и знаменатель дроби на «3» и применим теоремы о пределах, а также первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{3 \cdot x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \left[ \frac{0}{0} \right].$$

Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на  $x$ , после чего воспользуемся предыдущим примером, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot \sin 2x}{x}}{\frac{5 \cdot \sin 5x}{x}} = \frac{2}{5}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

Сведем данный предел к первому замечательному пределу, для этого сделаем замену:  $y = x - \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , а  $x = y + \frac{\pi}{2}$ , откуда

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{2y + \pi - \pi} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{2y} =\end{aligned}$$

В числителе дроби используем формулу приведения, тогда

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{2 \cdot y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{2 \cdot y} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = [1^\infty].$$

В данном случае неопределенность вида  $[1^\infty]$ , для ее раскрытия сделаем замену  $y = \frac{x}{2}$ ,  $2y = x$ . Тогда  $y \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$  и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} = \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^2 = e^2.\end{aligned}$$

Второй способ вычисления данного предела.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right]^2 = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right]^2 = e^2.$$

$$\begin{aligned}
5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2+x}{1+x} \right)^{3x} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2+x}{1+x} - 1 \right)^{3x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2+x-1-x}{1+x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1+x} \right)^{3x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1+x} \right)^{\frac{1+x}{1} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{1+x} \right)^{\frac{1+x}{1}} \right]^{\frac{3x}{1+x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3x}{1+x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{1+x}} = e^3.
\end{aligned}$$

6) Вычислить предел с помощью правила Лопиталя.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos^2 x}{4x^2} \right) &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)'}{(4x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sin x}{8x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{8x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)'}{(8x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

### Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

#### 1. Производная функции.

*Литература.* [11], Гл. III, § 1-10; [10], Гл. V, § 20; [9], Гл. VII, § 1; [12], Гл. V, § 1, 2, 4, 5, 7, 8; [5], Гл. V, § 1-2 задачи 1-138; [2], Гл. III, § 9.

2. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

*Литература.* [11], Гл. III, § 11-12, 16, 18; [10], Гл. V, § 21, 22; [12], Гл. V, § 9, 11; [5], Гл. V, § 5 задачи 206-211; [2], Гл. III, § 9.

#### 3. Производные высших порядков.

*Литература.* [11], Гл. III, § 22; [10], Гл. V, § 23; [12], Гл. V, § 10; [5], Гл. V, § 4 задачи 162-191; [2], Гл. III, § 9.

#### 4. Дифференциал функции.

*Литература.* [11], Гл. III, § 20, 23; [10], Гл. V, § 24; [12], Гл. V, § 3; [5], Гл. V, § 3-4 задачи 146-161, 198-205; [2], Гл. III, § 9.

## Краткий теоретический материал

### *Правила и формулы дифференцирования*

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

$$(c \cdot v)' = c \cdot v', \quad (c = \text{const}),$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$$

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

| № п/п | Производная простой функции                  | Производная сложной функции                   |
|-------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1     | $(c)' = 0$                                   |                                               |
| 2     | $(x)' = 1$                                   |                                               |
| 3     | $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$                   | $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$           |
| 4     | $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$          | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$          |
| 5     | $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ | $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ |
| 6     | $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$                   | $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$           |
| 7     | $(e^x)' = e^x$                               | $(e^u)' = e^u \cdot u'$                       |
| 8     | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$      | $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$      |
| 9     | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$                     | $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$                     |
| 10    | $(\sin x)' = \cos x$                         | $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$                 |
| 11    | $(\cos x)' = -\sin x$                        | $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$                |

| № п/п | Производная простой функции              | Производная сложной функции               |
|-------|------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 12    | $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$           | $(tg u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$           |
| 13    | $(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$         | $(ctg u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$         |
| 14    | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  | $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$  |
| 15    | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| 16    | $(arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$           | $(arctg u)' = \frac{u'}{1+u^2}$           |
| 17    | $(arcctg x)' = -\frac{1}{1+x^2}$         | $(arcctg u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$         |

### Примеры решения типовых задач

1. Найти производную сложной функции:

1)  $y = \ln^2 x$ .

$$y' = (\ln^2 x)' = 2 \ln x \cdot (\ln x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}.$$

2)  $y = \sqrt{x^2 - 10x}$ .

$$y' = (\sqrt{x^2 - 10x})' = \frac{(x^2 - 10x)'}{2\sqrt{x^2 - 10x}} = \frac{2x - 10}{2\sqrt{x^2 - 10x}} = \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x}}.$$

3)  $y = arctg(x^3)$ .

$$y' = (arctg(x^3))' = \frac{(x^3)'}{1 + (x^3)^2} = \frac{3x^2}{1 + x^6}.$$

## Тема 4. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций

Исследование функций с помощью производных.

*Литература.* [11], Гл. V, § 1-12; [10], Гл. V, § 25; [9], Гл. VII, § 4; [12], Гл. VI, § 1; [5], Гл. V, § 7 задачи 297-352; [2], Гл. III, § 10.

### Краткий теоретический материал

#### *Общая схема исследования функции и построения графика функции*

Исследование функции  $y = f(x)$  целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности функции.
6. Найти экстремумы функции.
7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.
8. На основании проведенного исследования построить график функции.

### Примеры решения типовых задач

1. Исследовать функцию  $y = \frac{x}{1-x^2}$  и построить ее график.

Область ее определения состоит из трех интервалов  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ , а график из трех ветвей.

Функция терпит разрыв при  $x = 1$  и  $x = -1$ .

Найдем точки пересечения графика с осями координат:

с осью Oх:  $\frac{x}{1-x^2} = 0$ ,  $x = 0$ ,  $1-x^2 \neq 0$ , точка пересечения

графика функции с осью Oх имеет координаты  $(0; 0)$ ;

с осью Oy:  $y = \frac{0}{1-0^2}$ ,  $y = 0$ , точка пересечения графика

функции с осью Oy имеет координаты  $(0; 0)$ .



Функция является нечетной, так как  $y(-x) = -y(x)$ , т. е.

$$y(-x) = \frac{-x}{1 - (-x)^2} = \frac{-x}{1 - x^2} = -\frac{x}{1 - x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

Найдем интервалы возрастания и убывания функции.

$$y' = \left( \frac{x}{1 - x^2} \right)' = \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} > 0, \quad \text{следовательно,}$$

функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

Исследуем функцию на экстремум.

$$y' = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} = 0, \quad 1 + x^2 = 0, \quad 1 - x^2 \neq 0.$$

$1 + x^2 = 0$  – пустое множество;

$1 - x^2 \neq 0, \quad x \neq \pm 1.$

Критическими точками являются точки  $x = 1$  и  $x = -1$ , в которых производная не существует, они не принадлежат области определения функции, следовательно, функция экстремумов не имеет.

Исследуем функцию на выпуклость.

$$\begin{aligned} y'' &= \left( \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} \right)' = \frac{2x(1 - x^2)^2 + 4x(1 - x^2) \cdot (1 + x^2)}{(1 - x^2)^4} = \\ &= \frac{2x(1 - x^2) \cdot ((1 - x^2) + 2(1 + x^2))}{(1 - x^2)^4} = \end{aligned}$$

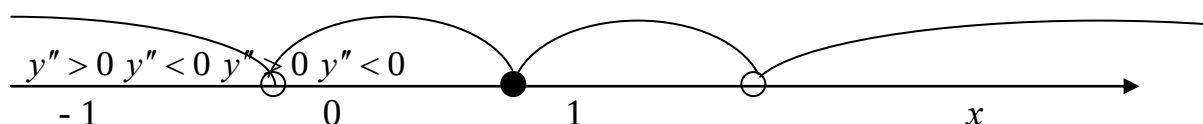
$$= \frac{2x(1-x^2+2+2x^2)}{(1-x^2)^3} = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3},$$

$$y'' = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3} = 0, \quad 2x = 0, \quad 3+x^2 = 0, \quad (1-x^2)^3 \neq 0.$$

$$2x = 0, \quad x = 0;$$

$$3+x^2 = 0 - \text{пустое множество};$$

$$1-x^2 \neq 0, \quad x \neq \pm 1.$$



Точка  $O(0; 0)$  – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервале  $(-1; 0)$  и  $(1; +\infty)$ , выпуклый вниз на интервалах  $(-\infty; -1)$  и  $(0; 1)$ .

Определим асимптоты графика функции.

Прямые  $x = 1$  и  $x = -1$  являются вертикальными асимптотами, т. к.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{1-x^2} = \left[ \frac{1-0}{1-(1-0)^2} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{1-x^2} = \left[ \frac{1+0}{1-(1+0)^2} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x}{1-x^2} = \left[ \frac{-1-0}{1-(-1-0)^2} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{1-x^2} = \left[ \frac{-1+0}{1-(-1+0)^2} = \frac{-1}{1-1} = \frac{-1}{0} \right] = -\infty.$$

Используя соответствующие формулы, выясним вопрос о наличии наклонной асимптоты  $y = kx + b$ :

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left( f(x) \cdot \frac{1}{x} \right), \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - k \cdot x).$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1-x^2} \right) = \left[ \frac{1}{-\infty} \right] = 0,$$

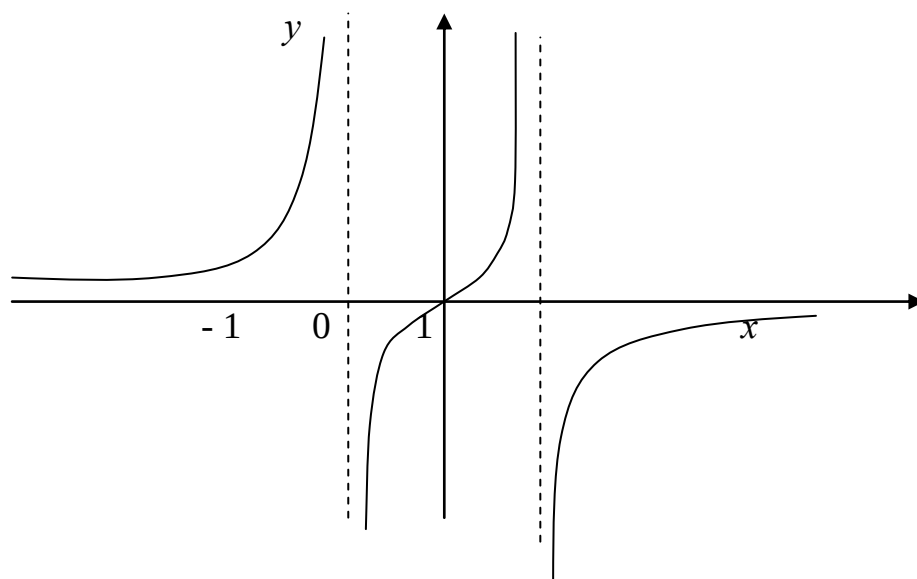
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{1-x^2} \right) = \left[ \frac{1}{-\infty} \right] = 0.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1-x^2} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1-x^2} \right) = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - 1} \right) = \left[ \frac{0}{0-1} = \frac{0}{-1} \right] = 0.$$

Следовательно,  $y = 0$  горизонтальная асимптота.

На основании проведенного исследования построим график функции.



## Тема 5. Интегральное исчисление функции одной переменной

### 1. Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования.

*Литература.* [11], Гл. X, § 1-6; [10], Гл. VII, § 29, 30; [9], Гл. VIII, § 1, 2; [12], Гл. VII, § 1-4; [5], Гл. VI, § 1-2 задачи 2-135; [2], Гл. VI, § 15.

### 2. Интегрирование рациональных, тригонометрических и иррациональных функций.

*Литература.* [11], Гл. X, § 7-14; [10], Гл. VII, § 31-34; [9], Гл. VIII, § 3-5; [12], Гл. VII, § 5, 6; [5], Гл. VI, § 3 задачи 230-253, 17-25, Гл. X задачи 102-126, 127-146, 152-169, 170-188, 189-216; [2], Гл. VI, § 16.

### 3. Определенный интеграл.

*Литература.* [2], Гл. VI, § 17; [11], Гл. XI, § 1-6; [12], Гл. VIII, § 1-9; [5], Гл. VI, § 4 задачи 254-289; [9], Гл. IX, § 1; [10], Гл. VIII, § 35-39.

### 4. Несобственные интегралы.

*Литература.* [2], Гл. VI, § 17; [11], Гл. XI, § 7; [12], Гл. VIII, § 11; [5], Гл. VI, § 6 задачи 355-382; [9], Гл. IX, § 2; [10], Гл. VIII, § 40.

## Краткий теоретический материал

**Неопределенный интеграл:**  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , где  $F(x) + C$  – множество всех первообразных функций для функции  $f(x)$ .

### Основные свойства неопределенного интеграла

1.  $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$ ,  $k = \text{const}$ .
2.  $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ .
3.  $\int f(kx \pm b)dx = \frac{F(kx \pm b)}{k} + C$ .

### Таблица основных интегралов

- |                                                                                                   |                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\int dx = x + C$ .                                                                            | 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ( $n \neq -1$ ).                     |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$ .                                                             | 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ .                                      |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C$ .                                                                      | 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .                                             |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C$ .                                                                | 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ .                                    |
| 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ .                                                     | 10. $\int \tan x dx = -\ln \cos x  + C$ .                                       |
| 11. $\int \cot x dx = \ln \sin x  + C$ .                                                          | 12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left \tan \frac{x}{2}\right  + C$ .           |
| 13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right  + C$ . | 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ .                            |
| 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ .                                  | 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left x + \sqrt{a^2+x^2}\right  + C$ . |
| 17. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$ .                                                      | 18. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$ .            |
| 19. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{a+x}{a-x}\right  + C$ .                |                                                                                 |

$$20. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$21. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

### **Методы интегрирования неопределенного интеграла**

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **табличным интегрированием**.

### **Алгоритм интегрирования методом подстановки**

1. Определить, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл.
2. Определить, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записать эту замену.
3. Найти дифференциалы обеих частей записи.
4. Выразить дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменной.
5. Произвести замену под интегралом.
6. Найти полученный интеграл.
7. Произвести обратную замену, т. е. вернуться к прежней переменной.

### **Метод интегрирования по частям неопределенного интеграла:**

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

### **Типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:**

1.  $\int P(x) \cdot e^{kx} dx$ ,  $\int P(x) \cdot \sin(kx) dx$ ,  $\int P(x) \cdot \cos(kx) dx$ , где  $P(x)$  – многочлен,  $k$  – константа. Удобно положить  $P(x) = u$ , а за  $dv$  обозначить все остальные сомножители.

2.  $\int P(x) \arcsin x dx$ ,  $\int P(x) \arccos(kx) dx$ ,  $\int P(x) \ln(kx) dx$ ,  $\int P(x) \operatorname{arctg}(kx) dx$ ,  $\int P(x) \operatorname{arcctg}(kx) dx$  где, где  $P(x)$  – многочлен,  $k$  – константа. Удобно положить  $P(x) dx = dv$ , а за  $u$  обозначить все остальные сомножители.

3.  $\int e^{\alpha x} \cdot \sin(kx) dx$ ,  $\int e^{\alpha x} \cdot \cos(kx) dx$ , где  $\alpha$  и  $k$  – константы. Удобно положить  $u = e^{\alpha x}$ , а за  $dv$  обозначить все остальные сомножители.

### ***Интегрирование простейших рациональных дробей***

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C.$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^m} dx = \frac{A(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C.$$

$$3. \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \cdot \ln|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

### ***Интегрирование неправильных рациональных дробей***

Всякую неправильную рациональную дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  путем деления числителя на знаменатель, можно представить в виде суммы многочлена  $L(x)$  и правильной рациональной дроби  $\frac{R(x)}{Q(x)}$ ,

$$\text{т. е. } \frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

### ***Интегрирование биномиальных дифференциалов***

$$\int x^m \cdot (a + bx^n)^p dx$$

Для интегрирования биномиального дифференциала используют следующие подстановки:

1) если  $p$  – целое число, то подстановка  $x = t^k$ , где  $k$  – наименьшее общее кратное знаменателей дробей  $m$  и  $n$ ;

2) если  $\frac{m+1}{n}$  – целое число, то подстановка  $a + bx^n = t^s$ , где  $s$  – знаменатель дроби  $p$ ;

3) если  $\frac{m+1}{n} + p$  – целое число, то подстановка  $a + bx^n = x^n \cdot t^s$ , где  $s$  – знаменатель дроби  $p$ .

**Определенный интеграл:**  $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

### **Основные свойства определенного интеграла**

1.  $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$ , где  $k$  – постоянная.
2.  $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
3.  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

### **Методы интегрирования определенного интеграла**

**Формула Ньютона-Лейбница:**  $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

### **Алгоритм интегрирования методом подстановки**

1. Определить, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл.
2. Определить, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записать эту замену.
3. Найти дифференциалы обеих частей записи.
4. Выразить дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменной.
5. Найти новые пределы интегрирования.
6. Произвести замену под интегралом и найти полученный интеграл.

**Метод интегрирования по частям определенного интеграла:**

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

### **Несобственный интеграл первого рода**

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл первого рода сходится, если существует конечный предел, и расходится, если предел не существует или он бесконечен.

### Несобственный интеграл второго рода

$$x = b \text{ точка разрыва, } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx;$$

$$x = a \text{ точка разрыва, } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл второго рода сходится, если существует конечный предел, и расходится, если предел не существует или он бесконечен.

### Примеры решения типовых задач

1. Вычислить интеграл  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$ .

Данный интеграл вычисляется методом замены переменной.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}} = \left[ \begin{array}{l} x^3 - 1 = t \\ 3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{3\sqrt{t}} = \frac{1}{3} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{t} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 - 1} + C.$$

2. Вычислить интеграл  $\int \frac{\sin x}{2 - \cos x} dx$ .

Данный интеграл вычисляется методом замены переменной.

$$\int \frac{\sin x}{2 - \cos x} dx = \left[ \begin{array}{l} 2 - \cos x = t \\ \sin x dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|2 - \cos x| + C.$$

3. Вычислить интеграл  $\int e^{\sin x} \cos x dx$ .

Данный интеграл вычисляется методом замены переменной.

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \left[ \begin{array}{l} \sin x = t \\ (\sin x)' dx = t' dt \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$$

4. Вычислить интеграл  $\int x \cdot \sin x dx$ .

При вычислении данного интеграла применим метод по частям.

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \sin x dx; \\ du = dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$



5. Вычислить интеграл  $\int x \cdot \ln x dx$ .

При вычислении данного интеграла применим метод по частям.

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \ln x; \\ du = 2x; \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

6. Вычислить интеграл  $\int \frac{dx}{x^2 \cdot (x-2)}$ .

Подынтегральная дробь – правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей первого и второго типа:

$$\frac{1}{x^2 \cdot (x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$ , приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{1}{x^2 \cdot (x-2)} = \frac{Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2}{x^2 \cdot (x-2)}, \text{ т. е.}$$

$$1 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2.$$

Из полученного равенства найдем коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  методом неопределенных коэффициентов. Для этого раскроем скобки в правой части последнего равенства и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$1 = (A+C) \cdot x^2 + (-2A+B) \cdot x - 2B.$$

Так как многочлены в обеих частях полученного равенства тождественно равны, то у них должны быть равны и коэффициенты при соответствующих степенях переменной  $x$ . Сравнивая эти коэффициенты, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A+C=0; \\ -2A+B=0; \\ -2B=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем  $A = -\frac{1}{4}$ ,  $B = -\frac{1}{2}$ ,  $C = \frac{1}{4}$ . Таким образом,

$$\frac{1}{x^2 \cdot (x-2)} = \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2} \text{ и}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot (x-2)} = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \ln|x-2| + C.$$

7. Вычислить интеграл  $\int \frac{3x+4}{x^2+6x+10} dx$ .

Подынтегральная дробь – правильная. Выделим полный квадрат суммы в знаменателе дроби и произведем замену.

$$\int \frac{3x+4}{x^2+6x+10} dx = \int \frac{3x+4}{(x^2+6x+9)+1} dx = \int \frac{3x+4}{(x+3)^2+1} dx = \left[ \begin{array}{l} x+3=t \\ x=t-3 \\ dx=dt \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{3(t-3)+4}{t^2+1} dt = \int \frac{3t-5}{t^2+1} dt = 3 \int \frac{tdt}{t^2+1} - 5 \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2} \ln|t^2+1| - 5 \arctgt + C =$$

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2+6x+10| - 5 \arctg(x+3) + C.$$

8. Вычислить интеграл  $\int \frac{x^2}{x-1} dx$ .

Данная подынтегральная дробь – неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, получаем:  $\frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$ .

$$\text{Отсюда } \int \frac{x^2}{x-1} dx = \int \left( x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C.$$

9. Вычислить интеграл  $\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}}$ .

$$\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

$$m = -4, n = 2, p = -\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} + p = -2.$$

Так как  $\frac{m+1}{n} + p = -2$  – целое число, следовательно, имеем третий случай интегрируемости биномиального дифференциала.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{1+x^2}} &= \int x^{-4} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \left[ \begin{aligned} 1+x^{-2} &= t^2, \quad x^{-2} = t^2 - 1, \quad x = (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad dx = -t(t^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} dt, \\ x^2 &= \frac{1}{t^2 - 1}, \quad x^{-4} = (t^2 - 1)^2, \quad t = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}. \end{aligned} \right] = \\ &= -\int (t^2 - 1)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot t \cdot (t^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} dt = -\int (t^2 - 1) dt = -\frac{t^3}{3} + t + C = \\ &= -\frac{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{3x^3} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + C = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}}{3x^3} + C. \end{aligned}$$

**10.** Вычислить интеграл  $\int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx &= \left[ \begin{aligned} -x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \\ x dx &= -\frac{dt}{2} \\ t_1 &= 0, \quad t_2 = -1 \end{aligned} \right] = \int_0^{-1} e^t \cdot \left(-\frac{dt}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^t dt = \left(\frac{1}{2} \cdot e^t\right) \Big|_{-1}^0 = \\ &= \frac{1}{2} (e^0 - e^{-1}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{e-1}{2e}. \end{aligned}$$

11. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$ .

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx = \left[ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{array} \right] = 2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{t+1} = 2 \int_0^1 \left( t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= 2 \left( \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 \right) = -1 + 2 \ln 2 = 2 \ln 2 - 1.$$

12. Вычислить несобственный интеграл или установить его

расходимость  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ .

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 4} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} x+1 = t \\ dx = dt \\ t_1 = 1 \\ t_2 = b+1 \end{array} \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{b+1} \frac{dt}{t^2 + 4} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} \Big|_1^{b+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \arctg \frac{b+1}{2} - \arctg \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2} \right), \text{ следовательно, интеграл}$$

сходится.

13. Вычислить несобственный интеграл или установить его

расходимость  $\int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$ .

При  $x \rightarrow 4$  функция  $\frac{1}{(x-4)^2} \rightarrow \infty$ , следовательно,

$$\int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{4+\varepsilon}^5 \frac{dx}{(x-4)^2} = \left[ \begin{array}{l} x-4=t \\ dx=dt \\ t_1=\varepsilon \\ t_2=1 \end{array} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{t^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{t} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty, \text{ таким образом, данный интеграл}$$

расходится.

## Тема 6. Теория функции комплексной переменной

### 1. Понятие комплексного числа.

*Литература.* [2], Гл. V, § 13; [11], Гл. VII, § 1; [5], Гл. IX задача 13; [9], Гл. X, § 1; [10], Гл. VI, § 27.

### 2. Действия над комплексными числами.

*Литература.* [2], Гл. V, § 13; [11], Гл. VII, § 2-5; [5], Гл. IX задачи 1-12, 14-52; [9], Гл. X, § 2; [10], Гл. VI, § 28.

## Краткий теоретический материал

**Комплексными числами** называются числа вида  $z = x + yi$ , где  $x$  – действительная часть комплексного числа,  $yi$  – мнимая часть комплексного числа,  $i$  – мнимая единица, такая что  $i^2 = -1$ .

**Противоположное комплексное число** числу  $z = x + yi$  имеет вид:  $-z = -x - yi$ .

**Сопряженное комплексное число** числу  $z = x + yi$  имеет вид:  $\bar{z} = x - yi$ .

**Модуль комплексного числа** вычисляется по формуле:  $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Аргументом комплексного числа** называется угол между положительным направлением оси абсцисс и радиус вектором, изображающим комплексное число:  $\angle \varphi = \arg z$ .

## Формы записи комплексных чисел

$z = x + yi$  – алгебраическая форма;

$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$  – тригонометрическая форма;

$z = r \cdot e^{i\varphi}$  – показательная форма.

### **Действия над комплексными числами**

1. **Сумма комплексных чисел**  $z_1 = x_1 + y_1 i$  и  $z_2 = x_2 + y_2 i$  вычисляется по формуле:  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ .

2. **Разность комплексных чисел**  $z_1 = x_1 + y_1 i$  и  $z_2 = x_2 + y_2 i$  вычисляется по формуле:  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$ .

3. **Произведение комплексных чисел в алгебраической форме** вычисляется по формуле:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2)i.$$

**Произведение комплексных чисел в тригонометрической форме** вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

**Произведение комплексных чисел в показательной форме** вычисляется по формуле:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

4. **Деление комплексных чисел в алгебраической форме** вычисляется по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i) \cdot (x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

**Деление комплексных чисел в тригонометрической форме** вычисляется по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

**Деление комплексных чисел в показательной форме** вычисляется по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

5. **Возведения комплексного числа**  $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$  **в  $n$ -ую степень** используется формула, которая называется формулой Муавра:

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)).$$

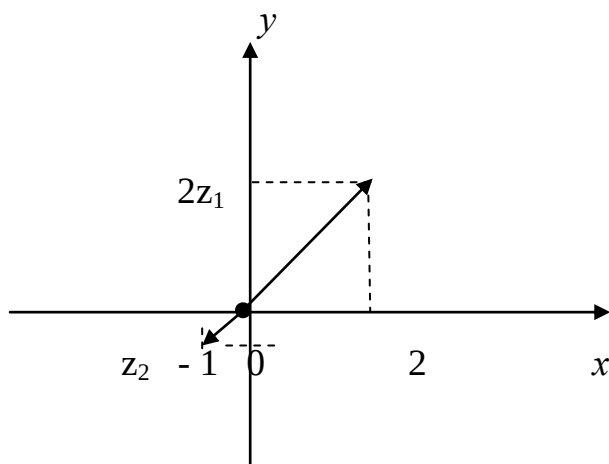
6. Пусть комплексное число задано в тригонометрической форме  $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ . Тогда  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$ , где  $k = 0; 1; 2; \dots, n-1$ .

## Примеры решения типовых задач

1. Записать комплексные числа  $z_1 = 2 + 2i$  и  $z_2 = -1 - i$  в тригонометрической и показательной форме. Найти:

- 1)  $z_1 \cdot z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$  в тригонометрической и показательной формах;
- 2)  $z_1^3$  в тригонометрической форме;
- 3)  $\sqrt{z_2}$  в тригонометрической форме.

Изобразим числа  $z_1$  и  $z_2$  на комплексной плоскости.



Запишем комплексные числа  $z_1$  и  $z_2$  в тригонометрической и показательной формах.

Модуль комплексного числа:  $|z_1| = r_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

Комплексное число  $z_1$  находится в первой четверти, значит, аргумент комплексного числа будет равен

$$\arg z_1 = \varphi_1 = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{2}{2} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$z_1 = 2\sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad - \text{ тригонометрическая форма записи}$$

комплексного числа;

$$z_1 = 2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi i}{4}} \quad - \text{ показательная форма записи комплексного числа.}$$

Модуль комплексного числа:  $|z_2| = r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ .

Комплексное число  $z_2$  находится в третьей четверти, значит, аргумент комплексного числа будет равен

$$\arg z_2 = \varphi_2 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \pi + \operatorname{arctg} \left( \frac{-1}{-1} \right) = \pi + \operatorname{arctg} 1 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{4} \right)$  – тригонометрическая форма записи комплексного числа;

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{4}i} \text{ – показательная форма записи комплексного числа.}$$

Найдем  $z_1 \cdot z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$  в тригонометрической и показательной формах.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \left( \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right),$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4}\right) \right) = 4 \cdot \left( \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right),$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4}\right)} = 4 \cdot e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \left( \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right) \right) = 2 \cdot \left( \cos(-\pi) + i \cdot \sin(-\pi) \right) =$$

$$= 2 \cdot \left( \cos(\pi) - i \cdot \sin(\pi) \right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right)} = 2 \cdot e^{i(-\pi)}.$$



Возведем комплексное число  $z_1 = 2\sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$  в 3-ю степень, используя формулу Муавра:  $z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$ ,

$$z_1^3 = \left( 2\sqrt{2} \right)^3 \cdot \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right) = 16\sqrt{2} \cdot \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right).$$

Найдем  $\sqrt{z_2}$  в тригонометрической форме.

$$\sqrt{z_2} = \sqrt{r_2} \cdot \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{2} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{2} \right), \text{ где } k = 0; 1.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{z_2} &= \sqrt{\sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{4} \right)} = \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \left( \cos \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{2} + i \cdot \sin \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{2} \right) = \\ &= \sqrt[4]{2} \cdot \left( \cos \frac{5\pi + 8\pi k}{8} + i \cdot \sin \frac{5\pi + 8\pi k}{8} \right). \end{aligned}$$

При  $k = 0$  получаем,

$$\sqrt{z_2} = \sqrt[4]{2} \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{8} \right).$$

При  $k = 1$  получаем,

$$\sqrt{z_2} = \sqrt[4]{2} \cdot \left( \cos \frac{5\pi + 8\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{5\pi + 8\pi}{8} \right) = \sqrt[4]{2} \cdot \left( \cos \frac{13\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{13\pi}{8} \right).$$

## Тема 7. Функции нескольких переменных

### 1. Функции двух переменных.

*Литература.* [2], Гл. IV, § 11; [11], Гл. VIII, § 1-4; [12], Гл. XI, § 1-4; [5], Гл. XI, § 1-2 задачи 1-20, 39-52, 59-74, 80-91; [9], Гл. XI, § 1, 2; [10], Гл. IX, § 43.

### 2. Производные и дифференциалы функции двух переменных.

*Литература.* [2], Гл. IV, § 11; [11], Гл. VIII, § 5-12; [12], Гл. XII, § 1-3; [5], Гл. XII, § 1-4 задачи 1-19, 23-32, 34-45, 59-66, 75-78, 81-92; [9], Гл. XI, § 3; [10], Гл. IX, § 44.

### 3. Экстремум функции двух переменных.

*Литература.* [2], Гл. IV, § 12; [11], Гл. VIII, § 17; [12], Гл. XII, § 8; [5], Гл. XII, § 6 задачи 109-118; [9], Гл. XI, § 7; [10], Гл. IX, § 46.

### Краткий теоретический материал

#### *Алгоритм исследования функции $z = f(x; y)$ на экстремум*

1. Найти частные производные:  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .
2. Составить и решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

**Точки**, координаты которых удовлетворяют указанной системе, называют **стационарными**.

3. Найти  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial xy}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  и вычислить значение

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial xy} \right)^2 \text{ в каждой стационарной точке.}$$

После этого использовать следующую схему:

- если  $\Delta > 0$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$   $\left( \text{или } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0 \right)$ , то исследуемая точка является точкой минимума;
- если  $\Delta > 0$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$   $\left( \text{или } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0 \right)$ , то исследуемая точка есть точка максимума;
- если  $\Delta < 0$ , то в рассматриваемой стационарной точке экстремума нет;
- если  $\Delta = 0$ , то ничего определённого про наличие экстремума сказать нельзя; требуется дополнительное исследование.

## Примеры решения типовых задач

1. Исследовать на экстремум функцию

$z = 4x^2 - 6xy - 34x + 5y^2 + 42y + 7$ . Будем следовать указанному выше алгоритму.

Для начала найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x - 6y - 34; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 10y + 42.$$

Составим систему уравнений 
$$\begin{cases} 8x - 6y - 34 = 0; \\ -6x + 10y + 42 = 0. \end{cases}$$

Сократим каждое уравнение этой системы на 2 и перенесём числа в правые части уравнений: 
$$\begin{cases} 4x - 3y = 17; \\ -3x + 5y = -21. \end{cases}$$

Мы получили систему линейных алгебраических уравнений. Решая эту систему уравнений, получим  $x = 2$ ,  $y = -3$  – это координаты стационарной точки  $(2; -3)$ .

Теперь приступим ко второму шагу алгоритма. Найдём частные производные второго порядка: 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = -6; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10.$$

Вычислим значение  $\Delta$ :  $\Delta = 8 \cdot 10 - (-6)^2 = 80 - 36 = 44$ .

Так как  $\Delta > 0$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8 > 0$ , то, согласно алгоритму, точка  $(2; -3)$  есть точка минимума функции  $z = f(x; y)$ .

Минимум функции  $z = f(x; y)$  найдём, подставив в заданную функцию координаты точки  $(2; -3)$ :

$$z_{\min} = z(2; -3) = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \cdot (-3) - 34 \cdot 2 + 5 \cdot (-3)^2 + 42 \cdot (-3) + 7 = -90.$$

Ответ:  $(2; -3)$  – точка минимума,  $z_{\min} = -90$ .

## ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

**1–25. Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера.**

$$1. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -2x_2 - 5x_3 = -12; \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7; \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 10; \\ 2x_2 - x_3 = -4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 5; \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -15; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2; \\ -x_1 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1; \\ -2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1; \\ -x_1 + 3x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -5; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -2; \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -11; \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 4; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -10; \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 8; \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6; \\ -3x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -13. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -10; \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -8; \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -9; \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 8; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5; \\ x_1 + 9x_2 - 4x_3 = -1; \\ -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4; \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -6; \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 17; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 8x_3 = 5; \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4; \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 6; \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5; \\ -2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$$

**26–50. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ .**

**Найти:**

- 1) длину ребра  $A_1A_2$ ;
- 2) угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$ ;
- 3) площадь грани  $A_1A_2A_3$ ;
- 4) объем пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ ;
- 5) уравнение прямой  $A_1A_2$ .

26.  $A_1(-1; 2; 1), A_2(-2; 2; 5), A_3(-3; 3; 1), A_4(-1; 4; 3).$
27.  $A_1(7; 7; 3), A_2(6; 5; 8), A_3(3; 5; 8), A_4(8; 4; 1).$
28.  $A_1(4; 2; 5), A_2(0; 7; 2), A_3(0; 2; 7), A_4(1; 5; 0).$
29.  $A_1(4; 4; 10), A_2(-4; 10; 2), A_3(2; 8; 4), A_4(9; 6; 9).$
30.  $A_1(-2; 1; -1), A_2(-3; 1; 3), A_3(-4; 2; -1), A_4(-2; 3; 1).$
31.  $A_1(1; 1; 2), A_2(0; 1; 6), A_3(-1; 2; 2), A_4(1; 3; 4).$
32.  $A_1(-1; -2; 1), A_2(-2; -2; 5), A_3(-3; -1; 1), A_4(-1; 0; 3).$
33.  $A_1(2; -1; 1), A_2(1; -1; 5), A_3(0; 0; 1), A_4(2; 1; 3).$
34.  $A_1(-1; 1; -2), A_2(-2; 1; 2), A_3(-3; 2; -2), A_4(-1; 3; 0).$
35.  $A_1(4; 6; 5), A_2(6; 9; 4), A_3(2; 10; 10), A_4(7; 5; 9).$
36.  $A_1(3; 5; 4), A_2(8; 7; 4), A_3(5; 10; 4), A_4(4; 7; 8).$
37.  $A_1(10; 6; 6), A_2(-2; 8; 2), A_3(6; 8; 9), A_4(7; 10; 3).$
38.  $A_1(1; 8; 2), A_2(5; 2; 6), A_3(5; 7; 4), A_4(4; 10; 9).$
39.  $A_1(6; 6; 5), A_2(4; 9; 5), A_3(4; 6; 11), A_4(6; 9; 3).$
40.  $A_1(7; 2; 2), A_2(5; 7; 7), A_3(5; 3; 1), A_4(2; 3; 7).$
41.  $A_1(8; 6; 4), A_2(10; 5; 5), A_3(5; 6; 8), A_4(8; 10; 7).$
42.  $A_1(1; 2; 1), A_2(0; 2; 5), A_3(-1; 3; 1), A_4(1; 4; 3).$
43.  $A_1(-2; -1; 1), A_2(-3; -1; 5), A_3(-4; 0; 1), A_4(-2; 1; 3).$
44.  $A_1(1; -1; 2), A_2(0; -1; 6), A_3(-1; 0; 2), A_4(1; 1; 4).$
45.  $A_1(1; -2; 1), A_2(0; -2; 5), A_3(-1; -1; 1), A_4(1; 0; 3).$
46.  $A_1(0; 3; 2), A_2(-1; 3; 6), A_3(-2; 4; 2), A_4(0; 5; 4).$
47.  $A_1(-1; 2; 0), A_2(-2; 2; 4), A_3(-3; 3; 0), A_4(-1; 4; 2).$
48.  $A_1(2; 2; 3), A_2(1; 2; 7), A_3(0; 3; 3), A_4(2; 4; 5).$
49.  $A_1(0; -1; 2), A_2(-1; -1; 6), A_3(-2; 0; 2), A_4(0; 1; 4).$
50.  $A_1(3; 0; 2), A_2(2; 0; 6), A_3(1; 1; 2), A_4(3; 2; 4).$

**51–75. Вычислить пределы функций а), б), г), не пользуясь правилом Лопиталя. Предел функции в) вычислить по правилу Лопиталя.**

$$51. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x}{-5x^2 + x - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{e^{x^2} - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 7} (15 + 2x)^{\frac{5}{x+7}}.$$

$$52. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 7x + 2}{x^4 - 5x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\arcsin(4-x)}{\ln(x-3)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{\frac{1}{x-7}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x^2)^{2x^2}.$$

$$53. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 - x}{3x^2 + 7x - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{4}\right)}{e^{x+1} - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} (5-x)^{-\frac{2}{x-4}}.$$

$$54. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{12} - 2x + 5}{-5x^2 + 3x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} (7 + 2x)^{\frac{4}{x+3}}.$$

$$55. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - x}{2x^{32} + 3x + 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^2(\pi - 3x)}{(3x - \pi)^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)^{-\frac{3}{4-2x}}.$$

$$56. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x^2)^{-\frac{3}{x^2}}.$$

$$57. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + 5x}{x^2 + 4x + 3};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{5x^2};$$

$$58. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x - 1}{-2x^5 + 3x};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)};$$

$$59. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2 + 4x}{3x^2 - x + 2};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 4}{\arcsin(x + 2)};$$

$$60. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^7 - 3x - 1}{-4x^2 + 2x};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{e^{-x^2} - 1};$$

$$61. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{3x^8 - 3x + 2};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}{x - 1};$$

$$62. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 2x + 7};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sqrt{x+1} - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^3 + x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{6}{(9 + 2x)^{x+4}}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x-3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} (-3 - 2x)^{-\frac{2}{x+2}}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 5x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{-\frac{3}{x-1}}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x-2}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)^{\frac{1}{6-2x}}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x});$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} (5 - x)^{\frac{2}{x-4}}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 4});$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -3} (7 + 2x)^{\frac{-4}{x+3}}.$$



$$63. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 - x - 4}{4x^2 + 3x + 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x};$$

$$64. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 2}{x^{13} - x - 6};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arctg x};$$

$$65. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 11}{7x^3 - 5x^2 + x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x};$$

$$66. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^8 - 2x^2 + x^{11}}{3x^3 + 5x - 10};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{5x^2};$$

$$67. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 8}{3x^6 - 5x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2};$$

$$68. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 8}{3x^2 - 5x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x};$$

$$69. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^8 + 9x + 17}{21x^3 + 10x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x);$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-2} \right)^x.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^x.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3});$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+1}{4x} \right)^{2x}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1});$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} (5 + 2x)^{\frac{1}{x+2}}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-2}{4x} \right)^{2x}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{2+2x+x^2}}{x+1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}}{x-4};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x+3}{6x+1} \right)^{x+1}.$$

$$70. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 9x^2 + 2x}{3x^{11} - 8x + 4};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x};$$

$$71. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 3x + 1};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 1}{\arctg x};$$

$$72. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^{12} + 15x - 1}{x^2 - 3x + 1};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arctg x};$$

$$73. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^{52} - 7x - 4};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 7x}{\sin 2x};$$

$$74. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{\sin 3x};$$

$$75. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^{22} - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\cos^3 x - \cos x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{6 - x}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - 1}{x + 3} \right)^{x+2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - \sqrt{9 - x}}{x - 5};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{7 - x}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 1}{x^3} \right)^{x^3}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x + 7} - \sqrt{3 - x}}{x + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{10x - 3}{10x - 1} \right)^{5x}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{8 - x}}{x - 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 5}{x - 7} \right)^{\frac{x}{2}}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x + 5} - \sqrt{3 - x}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 3}{x + 4} \right)^{x+4}.$$

**76–100. Найти производную функции.**

76.  $y = \ln(1 + \cos x)$ .

77.  $y = \operatorname{ctg}^4 x$ .

78.  $y = e^{\sqrt{x}}$ .

79.  $y = \arcsin \sqrt{x}$ .

80.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .

81.  $y = \operatorname{tg}(\cos x)$ .

82.  $y = \sqrt{\cos x - 2}$ .

83.  $y = 5^{\arccos x}$ .

84.  $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ .

85.  $y = \frac{1}{2}(x^2 - 4)^2$ .

86.  $y = \lg(1 - x^3)$ .

87.  $y = \sqrt{e^{x+1}}$ .

88.  $y = \arcsin(6^x)$ .

89.  $y = \ln(\operatorname{tg} x + x)$ .

90.  $y = \sqrt{3 \operatorname{ctg} x}$ .

91.  $y = \ln^3 x$ .

92.  $y = \sqrt[3]{x^2 - 8}$ .

93.  $y = \operatorname{tg}(\sqrt[7]{x})$ .

94.  $y = \log_2 \frac{x^2}{2}$ .

95.  $y = \sqrt{x^3 - x + 2}$ .

96.  $y = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}}$ .

97.  $y = \operatorname{arcctg} x^4$ .

98.  $y = \sqrt{\ln x - 4}$ .

99.  $y = \sqrt[5]{5^x}$ .

100.  $y = \cos \sqrt[3]{x}$ .

**101–125. Исследовать функцию средствами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить график.**

101.  $y = \frac{3x^2 - 7}{2x + 1}$ .

102.  $y = \frac{17 - x^2}{4x - 5}$ .

103.  $y = \frac{21 - x^2}{7x + 9}$ .

104.  $y = \frac{2x^2 - 6}{x - 2}$ .

$$105. y = \frac{x^2 - 11}{4x - 3}.$$

$$106. y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}.$$

$$107. y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}.$$

$$108. y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 4}.$$

$$109. y = \frac{x^3 - 4}{x^2}.$$

$$110. y = \frac{x^3 - 32}{x^2}.$$

$$111. y = \frac{1 + x^2}{1 + x}.$$

$$112. y = \frac{3x^2 - 10}{3 - 2x}.$$

$$113. y = \frac{9 - 10x^2}{4x - 1}.$$

$$114. y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

$$115. y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}.$$

$$116. y = \frac{3x - 2}{x^3}.$$

$$117. y = \frac{4x + 1}{x^2}.$$

$$118. y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}.$$

$$119. y = \frac{2x + 1}{2 + x}.$$

$$120. y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}.$$

$$121. y = \frac{4x}{x - 2}.$$

$$122. y = \frac{x^3}{1 + x}.$$

$$123. y = \frac{2x^2}{x + 1}.$$

$$124. y = \frac{x^3 - 4}{x^2}.$$

$$125. y = \frac{4x}{x^3 - 8}.$$

**126–150. Вычислить:**

а) неопределенный интеграл;

б) неопределенный интеграл;

в) определенный интеграл;

г) несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$126. \text{ а) } \int (1 - 6x) \cdot e^{2x} dx;$$

$$\text{ б) } \int \frac{x^2 dx}{x^2 - 2x + 4};$$

$$\text{B)} \int_2^7 \frac{\sqrt{x+2} dx}{x};$$

$$127. \text{ a)} \int (4+3x) \cdot e^{3x} dx;$$

$$\text{B)} \int_{-3/4}^0 \frac{3x dx}{\sqrt{(x+1)^3}};$$

$$128. \text{ a)} \int (4-16x) \cdot \sin 4x dx;$$

$$\text{B)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{4-x};$$

$$129. \text{ a)} \int (5x-2) \cdot e^{3x} dx;$$

$$\text{B)} \int_{-8}^0 \frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}};$$

$$130. \text{ a)} \int (4x-2) \cdot \cos 2x dx;$$

$$\text{B)} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}-3};$$

$$131. \text{ a)} \int (2-4x) \cdot \sin 2x dx;$$

$$\text{B)} \int_{-4}^1 \frac{x dx}{\sqrt{(5-x)^3}};$$

$$132. \text{ a)} \int (4x-3) e^{-2x} dx;$$

$$\text{B)} \int_{-3/4}^0 \frac{dx}{2-\sqrt{x+1}};$$

$$133. \text{ a)} \int (2-9x) \cdot e^{-3x} dx;$$

$$\text{Г)} \int_0^8 \frac{3x+2}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$\text{б)} \int \frac{2x^2-3x+1}{x^3-1} dx;$$

$$\text{Г)} \int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$$

$$\text{б)} \int \frac{3x-7}{x^3+4x^2+4x+16} dx;$$

$$\text{Г)} \int_{-3}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}.$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2};$$

$$\text{Г)} \int_e^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$\text{б)} \int \frac{x^2 dx}{x^3+0,5x^2+8x+4};$$

$$\text{Г)} \int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^2}.$$

$$\text{б)} \int \frac{x+3}{x^3+x^2-2x} dx;$$

$$\text{Г)} \int_1^2 \frac{x dx}{x-1}.$$

$$\text{б)} \int \frac{(x^2-3) dx}{x^4+5x^2+6};$$

$$\text{Г)} \int_{-\pi/2}^0 \operatorname{tg} x dx.$$

$$\text{б)} \int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx;$$

$$\text{B)} \int_{-1}^0 \frac{dx}{8 + \sqrt[3]{x^2}};$$

$$134. \text{ a)} \int (5x + 6) \cdot \cos 2x dx;$$

$$\text{B)} \int_{-1/4}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x + 1}};$$

$$135. \text{ a)} \int (3x - 2) \cdot \cos 5x dx;$$

$$\text{B)} \int_{-1}^0 \frac{dx}{4 + \sqrt[3]{x^2}};$$

$$136. \text{ a)} \int (x\sqrt{2} - 3) \cdot \cos 2x dx;$$

$$\text{B)} \int_0^4 \frac{\sqrt{x} dx}{4 + x};$$

$$137. \text{ a)} \int x \cdot 3^x dx;$$

$$\text{B)} \int_3^6 \frac{\sqrt{x - 3} dx}{x};$$

$$138. \text{ a)} \int (4x + 7) \cdot \cos 3x dx;$$

$$\text{B)} \int_0^3 \frac{(x^2 + \sqrt{x + 1}) dx}{\sqrt{x + 1}};$$

$$139. \text{ a)} \int (2x - 5) \cdot \cos 4x dx;$$

$$\text{B)} \int_2^6 \frac{\sqrt{x - 2} dx}{1 + \sqrt{x - 2}};$$

$$140. \text{ a)} \int (8 - 3x) \cdot \cos 5x dx;$$

$$\text{Г)} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$$

$$\text{б)} \int \frac{(x^2 - x + 1) dx}{x^4 + 2x^2 - 3};$$

$$\text{Г)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

$$\text{б)} \int \frac{(6x + 5) dx}{x^2 + 4x};$$

$$\text{Г)} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^3}}.$$

$$\text{б)} \int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)} dx;$$

$$\text{Г)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx.$$

$$\text{б)} \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 10} dx;$$

$$\text{Г)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{б)} \int \frac{x^2 dx}{x^4 - 81};$$

$$\text{Г)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{9x^2 + 1}.$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{x^3 + 1};$$

$$\text{Г)} \int_0^{\infty} e^{-5x} dx.$$

$$\text{б)} \int \frac{(x^3 - 6) dx}{x^4 + 6x^2 + 8};$$

$$\text{B)} \int_{25}^{49} \frac{\sqrt{x} dx}{x-6};$$

$$141. \text{ a)} \int (5+x) \cdot \sin 3x dx;$$

$$\text{B)} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{2x+7}};$$

$$142. \text{ a)} \int x \cdot \ln x dx;$$

$$\text{B)} \int_{-8}^0 \frac{\sqrt[3]{x^2} dx}{3 + \sqrt[3]{x^2}};$$

$$143. \text{ a)} \int x \cdot \cos x dx;$$

$$\text{B)} \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)};$$

$$144. \text{ a)} \int x \cdot \sin x dx;$$

$$\text{B)} \int_1^2 \frac{dx}{2 + \sqrt[4]{x-1}};$$

$$145. \text{ a)} \int (2-3x) \cdot \sin 2x dx;$$

$$\text{B)} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+5}};$$

$$146. \text{ a)} \int (4x+3) \cdot \sin 5x dx;$$

$$\text{B)} \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4};$$

$$147. \text{ a)} \int (7x-10) \cdot \sin 4x dx;$$

$$\text{Г)} \int_0^{e^{-2}} \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$\text{б)} \int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx;$$

$$\text{Г)} \int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$\text{б)} \int \frac{(x^3+1) dx}{x^3-5x^2+6x};$$

$$\text{Г)} \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx.$$

$$\text{б)} \int \frac{x dx}{x^3+1};$$

$$\text{Г)} \int_0^\infty \frac{dx}{4x^2+1}.$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{x^4-1};$$

$$\text{Г)} \int_{-5}^{-4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+5)^4}}.$$

$$\text{б)} \int \frac{3x+1}{x \cdot (x^2+1)} dx;$$

$$\text{Г)} \int_{14}^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+2)}}.$$

$$\text{б)} \int \frac{(x^3+1) dx}{x^2-3x+2};$$

$$\text{Г)} \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

$$\text{б)} \int \frac{3x+5}{x^2+2x+2} dx;$$

$$b) \int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}};$$

$$r) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}.$$

$$148. a) \int (2+x) \cdot \cos x dx;$$

$$б) \int \frac{(x^3+6)dx}{x^2+5x-6};$$

$$b) \int_0^1 \frac{x dx}{1+\sqrt[3]{x}};$$

$$r) \int_2^6 \frac{x}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}} dx.$$

$$149. a) \int (\sqrt{2}-8x) \cdot \sin 3x dx;$$

$$б) \int \frac{x^3-4}{x^2-x-6} dx;$$

$$b) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

$$r) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$150. a) \int (4x^3+6x-7) \cdot \ln x dx;$$

$$б) \int \frac{x^3+2}{x^2-x-2} dx;$$

$$b) \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}};$$

$$r) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

**151–175. Записать комплексные числа  $z_1$  и  $z_2$  в тригонометрической и показательной формах.**

**Найти:**

1)  $z_1 \cdot z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$  в тригонометрической и показательной формах;

2)  $z_1^3$  в тригонометрической форме;

3)  $\sqrt{z_2}$  в тригонометрической форме.

$$151. z_1 = 3-3i, z_2 = -1-i.$$

$$152. z_1 = 3i, z_2 = -1+i.$$

$$153. z_1 = -2-2\sqrt{3}i, z_2 = -1-i.$$

$$154. z_1 = -3+3i, z_2 = 2-2i.$$

$$155. z_1 = -2i, z_2 = -\sqrt{3}-i.$$

$$156. z_1 = -5+5i, z_2 = -2i.$$

$$157. z_1 = 6+6i, z_2 = -\sqrt{3}+i.$$

$$158. z_1 = 2-2\sqrt{3}i, z_2 = 1-i.$$

$$159. z_1 = -4+4i, z_2 = 2+2i.$$

$$160. z_1 = 2i, z_2 = 2-2i.$$



161.  $z_1 = 5i, z_2 = \sqrt{3} - i$ .  
 163.  $z_1 = 1 - i, z_2 = \sqrt{3} - i$ .  
 165.  $z_1 = 4i, z_2 = 2 - 2i$ .  
 167.  $z_1 = 2 + 2i, z_2 = -2 + 2i$ .  
 169.  $z_1 = -7 + 7i, z_2 = 7i$ .  
 171.  $z_1 = -3 + 3\sqrt{3}i, z_2 = -7i$ .  
 173.  $z_1 = -4 - 4i, z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ .  
 175.  $z_1 = 6i, z_2 = 2 + 2i$ .

162.  $z_1 = 7 - 7i, z_2 = -i$ .  
 164.  $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}i, z_2 = 3i$ .  
 166.  $z_1 = 2 - 2i, z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ .  
 168.  $z_1 = -5i, z_2 = \sqrt{3} + i$ .  
 170.  $z_1 = 1 + i, z_2 = -3 + \sqrt{3}i$ .  
 172.  $z_1 = -4i, z_2 = -2 - 2i$ .  
 174.  $z_1 = -8 + 8i, z_2 = 1 - i$ .

**176–200. Исследовать на экстремум функцию двух переменных  $z = f(x; y)$ .**

176.  $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$   
 178.  $z = x^2 + y^2 - 3x - 6y$   
 180.  $z = x^3 - 15xy + y^3$   
 182.  $z = x^2 + y^2 + 9x - xy - 6y + 20$   
 184.  $z = -6x^2 + 2xy - y^2 + 4y$   
 186.  $z = x^2 + y^2 - 2x + xy - y$   
 188.  $z = x^2 - y^2 - 6x + 4xy - 2y$   
 190.  $z = 3x^2 + 3y^2 - x^3 + 4y$   
 192.  $z = x^3 - 15x + 3xy^2 - 12y$   
 194.  $z = 3x^2 + 3x + y^2 - 4y + 1$   
 196.  $z = 6 - 3x^2 + x - 4y^2 - y$   
 198.  $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$   
 200.  $z = 1 + 6x - x^2 - xy + y^2$
177.  $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$   
 179.  $z = 3x^3 + 4xy - x + y^2 + 2$   
 181.  $z = x^2 + 3y^2 - 4x + 4$   
 183.  $z = (x - 1)^2 + 2y^2$   
 185.  $z = x^3 + 4x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y$   
 187.  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$   
 189.  $z = -y^3 + y^2 - xy^2$   
 191.  $z = 3x^2 + 18xy + 18y - 8x + 8$   
 193.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$   
 195.  $z = x^2 + xy - 6x + y^2 - 9y$   
 197.  $z = x - 3y^2 + 3xy - 12x^2$   
 199.  $z = x^3 + xy^2 + 6xy$

Светлана Александровна Худякова

Галина Васильевна Ваганова

Татьяна Борисовна Ванеева

Елена Владимировна Карпова

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты контрольной работы № 1  
для слушателей 1 года обучения факультетов заочного обучения  
и платных образовательных услуг Уральского института ГПС МЧС России

Специальность 280705 (20.05.01) Пожарная безопасность

Редактор Д. В. Телегина  
Компьютерная верстка *автора*

Подписано в печать 24.02.2015.

Тираж 100.

Объем 0,91 учет.-изд.л. Бумага писчая  
Редакционно-издательский отдел  
Уральского института ГПС МЧС России  
Екатеринбург, ул. Мира, 22