МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.А. КОСТЫЧЕВА»

Кафедра высшей математики

Л. Б. Винникова

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

**для студентов – заочников инженерного факультета
направление подготовки 35.03.06 «АГРОИНЖЕНЕРИЯ»
профили: «Технические системы в агробизнесе», «Технический сервис в агропромышленном комплексе», «Электрооборудование и электротехнологии»**

Рязань 2015

Учебно - практическое пособие обсуждено на заседании кафедры высшей математики Рязанского государственного агротехнологического университета и рекомендовано опубликованию « » 2015 г. Протокол №

Зав. кафедрой высшей математики,

канд. физ.-мат. наук, доцент Е.И. Троицкий

Учебно – практическое пособие утверждено методической комиссией факультета экономики и менеджмента Рязанского государственного агротехнологического университета

«___» ________2015г. Протокол №__

Председатель методической комиссии

факультета экономики и менеджмента И. В. Лучкова

Винникова Л.Б. Конторольные работы по математике для студентов-заочников направления подготовки: 35.03.06 - «Агроинженерия»: учебно-практическое пособие. – Рязань: Издательство ФГБОУ ВПО РГАТУ, 2015. – 102 с.

Учебно – практическое пособие предназначено для студентов – заочников первого курса инженерного факультета по направлению подготовки 35.03.06 «Агроинженерия». Материал учебного пособия соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам третьего поколения по указанному направлению подготовки. Пособие содержит программу дисциплины «Математика», список рекомендуемой литературы, 10 вариантов заданий контрольных работ. Даны примеры выполнения всех заданий контрольных работ, методические рекомендации по оформлению и выполнению контрольных работ.

Рецензенты:

Е. И. Троицкий, к. ф.-м. н., доцент, зав. кафедры высшей математики.

А. Н. Бачурин, к.т.н., доцент кафедры ЭМТП.

СОДЕРЖАНИЕ.

Общие методические указания.

Пособие рассчитано на студентов заочной формы обучения, но может быть использовано в качестве дополнительного учебно-методического пособия и студентами, обучающимися на очном отделени. При этом считается, что наиболее эффективным способом изучения курса высшей математики является самостоятельная работа студента: чтение учебников, решение задач, выполнение контрольных заданий.

Если в процессе изучения материала или при решении задач у студента возникнут трудности, то он может обратиться за консультацией к преподавателю кафедры высшей математики.

С целью упорядочения изучения курса и для систематической и своевременной проверки (и самопроверки) качества усвоения материала студент обязан выполнить 2 контрольные работы. Выполненные работы присылаются (или доставляются лично) на кафедру бизнес-информатики и прикладной математики в ауд.327 учебного корпуса №1. После рецензирования студент может забрать свои работы для изучения замечаний и подготовки к зачёту или экзамену.

Каждый студент выполняет тот вариант контрольных работ, который соответствует его учебному шифру в соответствии с таблицей, приведённой ниже. Учебный шифр студента – это номер его студенческого билета или зачётной книжки. Номер варианта соответствует последней цифре учебного шифра.

Номер варианта	Номера задач для контрольных работ
	Работа №1
1	1,11,21,31,41,51,61,71,81,91,101
2	2,12,22,32,42,52,62,72,82,92,102
3	3,13,23,33,43,53,63,73,83,93,103
4	4,14,24,34,44,54,64,74,84,94,104
5	5,15,25,35,45,55,65,75,85,95,105
6	6,16,26,36,46,56,66,76,86,96,106
7	7,17,27,37,47,57,67,77,87,97,107
8	8,18,28,38,48,58,68,78,88,98,108
9	9,19,29,39,49,59,69,79,89,99,109
0	10,20,30,40,50,60,70,80,90,100,110
	Работа №2
1	111,131,141,151,161,171,181,191,201,211,221,231,241,261
2	112,132,142,152,162,172,182,192,202,212,222,232,242,262
3	113,133,143,153,163,173,183,193,203,213,223,233,243,263
4	114,134,144,154,164,174,184,194,204,214,224,234,244,264
5	115,135,145,155,165,175,185,195,205,215,225,235,245,265
6	116,136,146,156,166,176,186,196,206,216,226,236,246,266
7	117,137,147,157,167,177,187,197,207,217,227,237,247,267
8	118,138,148,158,168,178,188,198,208,218,228,238,248,268
9	119,139,149,159,169,179,189,199,209,219,229,239,249,269
0	120,140,150,160,170,180,190,200,210,220,230,240,250,270

Рабочая программа курса высшей математики.

Рабочая программа составлена с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) третьего поколения по направлению подготовки 110800 «Агроинженерия» (квалификация «бакалавр»).

Рабочая программа разбита на темы, которые, в свою очередь, разбиты на отдельные вопросы. Эти вопросы являются теоретическим вопросами экзаменационных билетов.

Содержание программы.

I курс.

Тема №1. Определители. Матрицы и их применение к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

1. Определение определителя произвольного прядка. Миноры, алгебраические дополнения.
2. Свойства определителей, их применение к практическому вычислению определителей.
3. Определение матрицы, действия с матрицами: сложение, умножение на число, умножение двух матриц, вычисление обратной матрицы.
4. Матричная запись СЛАУ. Матричный метод и метод Крамера решения СЛАУ.
5. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Ступенчатые матрицы.
6. Метод Гаусса решения СЛАУ, различные случаи (на примерах). Теорема Кронекера-Капелли. Исследование однородных систем.

Тема №2. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия.

7. Определение вектора, длина вектора, нуль-вектор. Линейные операции над векторами. Коллинеарность двух векторов.
8. Линейная зависимость и независимость векторов. Иллюстрация этих понятий на примере векторов на плоскости и в пространстве.
9. Скалярное произведение векторов и его свойства. Скалярное произведение векторов в координатной форме.
10. Векторное произведение векторов и его свойства. Векторное произведение в координатной форме.
11. Смешанное произведение векторов и его свойства. Смешанное произведение векторов в координатной форме.
12. Различные уравнения плоскости в пространстве: с опорной точкой и вектором нормали, через три точки, общее и его частные случаи, в отрезках на осях.
13. Расстояние от точки до плоскости.
14. Взаимное расположение двух плоскостей: угол между двумя плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
15. Различные уравнения прямой линии в пространстве: с опорной точкой и направляющим вектором, параметрические, канонические, через две точки.

16. Взаимное расположение двух прямых в пространстве: угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.
17. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве: угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости, нахождение точки пересечения прямой и плоскости.
18. Различные уравнения прямой линии на плоскости (изложение рекомендуется проводить с использованием результатов выводов уравнений прямой в пространстве и плоскости в пространстве): с опорной точкой и направляющим вектором, через две точки, с угловым коэффициентом, с опорной точкой и вектором нормали, общее уравнение и его частные случаи, в отрезках на осях. Расстояние от точки до прямой.
19. Взаимное расположение двух прямых на плоскости: угол между двумя прямыми (вычисление различными способами), условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
20. Кривые второго порядка. Канонические уравнения эллипса. Эксцентриситет, директрисы.
21. Каноническое уравнение гиперболы. Эксцентриситет, директрисы, асимптоты.
22. Каноническое уравнение параболы.
23. Полярные координаты на плоскости, связь декартовых и полярных координат точки.
24. Цилиндрические и сферические координаты; связь с декартовыми.

Тема №3. Предел функции.

25. Понятие предела в функции в точке. Бесконечно малая функции, теорема о замене б. малой функции, ей эквивалентной. Свойства пределов.
26. Раскрытие неопределенностей от алгебраических функций.
27. Первый замечательный предел (вывод), следствия из него (цепочка эквивалентностей).
28. Второй замечательный предел и следствия из него. Натуральные логарифмы. Экспонента.
29. Непрерывность функции в точке, различные определения. Односторонние пределы.
30. Классификация точек разрыва. Вертикальные асимптоты.

Тема №4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

31. Определение производной функции. Физический, геометрический и экономический смысл производной. Эластичность функций.
32. Уравнение касательной и нормали к графику функции.
33. Дифференциал функции, геометрический смысл.
34. Производная суммы, произведения, частного. Производная сложной и обратной функций.

Тема №5. Приложения дифференциального исчисления.

35. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Лягранжа.
36. Формула Тейлора (Маклорена) с остаточным членом в форме Лагранжа. Формула Маклорена для функций e^{x}, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^{\alpha}$.
37. Исследование функций с помощью первой производной – условия постоянства, монотонности.
38. Экстремум функций. Необходимые условия экстремума. Два достаточных условия экстремума.
39. Исследование функции с помощью второй производной – выпуклость, вогнутость, перегиб.
40. Наклонные асимптоты графика функции.

Тема №6. Неопределенный интеграл.

41. Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства.
42. Интегрирование заменой переменной.
43. Интегрирование по частям.
44. Классы интегрируемых функций. Интегрирование простейших дробей.
45. Интегрирование простейших иррациональностей.
46. Интегрирование тригонометрических функций. Тригонометрические подстановки.

Тема №7. Определенный интеграл.

47. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции, приводящая к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла и его геометрический смысл. Свойства определенного интеграла.
48. Интеграл с переменным верхним пределом, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница.
49. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
50. Несобственные интегралы I рода – определение, вычисление, признаки сходимости.

Тема №8. Функции нескольких переменных (ФНП).

51. Определение ФНП. Геометрическое изображение функций двух переменных. Линия уровня. Примеры. Частные и полные приращения ФНП. Частные производные, полный дифференциал ФНП.
52. Экстремум ФНП – определение, необходимые условия, достаточные условия экстремума функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения ФНП в замкнутом множестве.
53. Производная по направлению. Градиент. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

Тема №9. Кратные интегралы.

54. Задача о вычислении объема тела, приводящая к понятию двойного интеграла. Определение двойного интеграла, его геометрический смысл.
55. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла.

56. Замена переменных в двойном интеграле, якобиан. Двойной интеграл в полярных координатах.
57. Задача о вычислении массы тела, приводящая к понятию тройного интеграла. Определение тройного интеграла. Свойства тройного интеграла.
58. Вычисление тройного интеграла.
59. Замена переменных в тройном интеграле, якобиан. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.
60. Приложения кратных интегралов.

Тема №10. Комплексные числа.

61. Расширенное понятие о числе. Мнимые и действительные числа.
62. Комплексные числа, действия с ними. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
63. Геометрическое изображение комплексных чисел в декартовой системе координат. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.
64. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа.
65. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формулы Муавра.
66. Элементарные функции комплексного переменного.

Тема №11 Обыкновенные дифференциальные уравнения (ДУ).

67. Основные понятия ДУ: частное и общее решения, геометрический смысл решения ДУ I порядка, метод изоклин.
68. ДУ с разделяющимися переменными.
69. Однородные ДУ I порядка.
70. Линейные ДУ (ЛДУ) I порядка – два метода решения. ДУ Бернулли.
71. ДУ в полных дифференциалах.
72. ЛДУ высших порядков, основные свойства. Линейная зависимость и независимость решений ЛОДУ, определитель Вронского, общее решение ЛОДУ.
73. ЛОДУ с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение. Структура общего решения ЛОДУ в различных случаях корней характеристического уравнения.
74. Линейные неоднородные ДУ (ЛНДУ), структура общего решения, теорема о наложении решений. Подбор решений ЛНДУ по виду правой части.

Тема №12. Числовые и степенные ряды.

75. Числовой ряд – определение, частичные суммы, сумма ряда. Простейшие свойства сходящихся числовых рядов.
76. Необходимый признак сходимости ряда.
77. Признак Даламбера.

78. Интегральный признак сходимости рядов. Эталонный ряд $\sum\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$.
79. Предельный признак сравнения рядов.
80. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимости. Теорема Лейбница, её применение к оценке остатка ряда.
81. Функциональный ряд, область сходимости. Степенной ряд. Теорема Абеля. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
82. Единственность разложения функций в степенной ряд. Ряды Тейлора (Маклорена). Разложение в ряд Маклорена функций e^{x}, $\sin x, \cos x$, $(1+x)^{\alpha}$.

Тема №13. Теория вероятностей.

83. Основные понятия теории вероятностей: случайное событие, пространство элементарных событий. Алгебра событий. Диаграммы Эйлера-Венна.
84. Вероятность случайного события. Аксиомы вероятностей, следствия из них, теорема сложения.
85. Примеры вероятных пространств – геометрические вероятности и классическое определение вероятности. Формулы комбинаторики.
86. Теорема умножения вероятностей.
87. Формула полной вероятности и формула Байеса.
88. Повторные испытания, формула Бернулли. Асимптотические формулы для формулы Бернулли: локальная теорема Муавра-Лапласа, интегральная теорема Лапласа, формула Пуассона.
89. Случайные величины (СВ), основные понятия. Ряд распределения и функция распределения дискретных СВ (ДСВ).
90. Функция распределения непрерывных СВ (НСВ). Общие свойства функции распределения.
91. Плотность вероятности и ее свойства.
92. Математическое ожидание СВ и его свойства.
93. Дисперсия СВ и ее свойства. Среднее квадратическое отклонение.
94. Примеры законов распределения; биноминальный закон, его свойства; закон Пуассона и его свойства; простейший поток событий.
95. Равномерное распределение и его свойства. Нормальное распределение и его свойства.
96. Предельные теоремы теории вероятностей. Лемма Маркова. Неравенство и теорема Чебышева. Неравенство и теорема Бернулли.
97. Понятие о центральной предельной теореме.

Тема №14. Математическая статистика.

98. Предмет математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд и его геометрическое изображение – полигон и гистограмма.
99. Точечные оценки параметров распределения. Гипотетическая интерпретация выборочных данных (ГИВД). Требования к точечным оценкам.
100. Выборочная средняя арифметическая и ее свойства.
101. Выборочная дисперсия и ее свойства, исправленная выборочная дисперсия.

102. Интервальные оценки параметров распределения. Доверительный интервал, доверительная вероятность. Построение доверительного интервала для неизвестного мат ожидания при известной дисперсии.
103. Распределение хи-квадрат Пирсона и его простейшие свойства. Построение доверительного интервала для неизвестной дисперсии.
104. Распределение Стьюдента и его простейшие свойства. Построение доверительного интервала для неизвестного мат ожидания при неизвестной дисперсии.
105. Критерии согласия. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона.
106. Распределение Фишера-Снедекора и его простейшие свойства. Понятие о дисперсионном анализе. Схема применения однофакторного дисперсионного анализа.
107. Элементы корреляционного анализа. Метод наименьших квадратов для определения параметров прямых регрессии y на x и x на y. Коэффициент корреляции и его свойства, шкала Чеддока.

Задания контрольных работ.

Каждый студент выполняет тот вариант контрольных работ, который соответствует его учебному шифру в соответствии с таблицей (информацию о номере своего варианта можно получить у методиста или преподавателя).

Контрольные работы выполняются в ученических тетрадях (каждая - в отдельной) и сдаются до начала сессии на проверку преподавателю.

Перед решением каждой задачи контрольной работы следует записать её условие.

Решение задач следует излагать достаточно подробно, делая соответствующие ссылки на теорию с указанием необходимых теорем и формул.

Контрольная работа №1.

Тема №1. Определители. Матрицы и их применение к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В задачах 1-10 вычислить определитель четвертого порядка.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -3 & 9 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 & 3 \\ 1 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 6 & -9 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 9 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & 6 & 8 \\ 0 & 7 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & -9 & -3 & -5 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & 18 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & -11 & 2 \\ 6 & 1 & -13 & 6 \end{vmatrix}$

В задачах 11-20 требуется решить СЛАУ (систему линейных алгебраических уравнений) по формулам Крамера и методом Гаусса.

11. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$ 13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ 19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$

Тема №2. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия.

В задачах 21-30 даны координаты вершин пирамиды АВСД. Найти: 1) косинус угла между ребрами АВ и АД, 2) площадь грани АВС, 3) объем пирамиды АВСД, 4) длину высоты пирамиды, проведенной из точки Д.

21. А(-2,1,2), В(4,0,0), С(3,2,7), Д(1,3,2).

22. А(1,-1,6), В(1,-2,1), С(-2,1,0), Д(2,2,5).

23. А(1,-1,6), В(4,5,-2), С(-1,3,0), Д(6,1,5).

24. А(-5,-1,8), В(2,3,1), С(4,1,-2), Д(6,3,7).

25. А(5,1,-4), В(1,2,-1), С(3,3,-4), Д(2,2,2).

26. А(1,1,1), В(2,3,4), С(4,3,2), Д(3,2,4).

27. А(1,1,2), В(2,3,-1), С(2,-2,4), Д(-1,1,3).

28. А(2,-3,5), В(0,2,1), С(-2,-2,3), Д(3,2,4).

29. А(2,1,-2), В(3,3,3), С(1,1,2), Д(-1,-2,-3).

30. А(2,3,1), В(4,1,-2), С(6,3,7), Д(-5,-4,8).

В задачах 31-40 даны координаты точек M,N,P,Q. Требуется: 1) составить уравнение прямой MN; 2) составить уравнение плоскости MNP; 3) составить уравнение прямой, проходящей через точку Q, перпендикулярно плоскости MNP; 4) найти точки пересечения этой прямой с плоскостью MNP; 5) найти расстояние от точки Q до плоскости MNP (двумя способами).

31. M (-3,-2,-4); N (-4,2,-7); P (5,0,3); Q (-1,3,0).

32. M (2,-2,1); N (-3,0,-5); P (0,-2,-1); Q (-3,4,7).

33. M (5,4,1); N (-1,-2,-2); P (3,-2,2); Q (-5,5,4).

34. M (3,6,-2); N (0,2,-3); P (1,-2,0); Q (-7,6,6).

35. M (1,-4,1); N (4,4,0); P (-1,2,-4); Q (-9,7,8).

36. M (4,6,-1); N (7,2,4); P (-2,0,-4); Q (3,1,-4).

37. M (0,6,-5); N (8,2,5); P (2,6,-3); Q (5,0,-6).

38. M (-2,4,-6); N (0,-6,1); P (4,2,1); Q (7,-1,-8).

39. M (-4,-2,-5); N (1,8,-5); P (0,4,-4); Q (9,-2,-1).0

40. M (3,4,-1); N (2,-4,2); P (5,6,0); Q (11,-3,-12).

В задачах 41-50 даны вершины треугольника MNP. Требуется найти: 1) длину стороны MN; 2) уравнение сторон MN и NP и их угловые коэффициенты; 3) угол N; 4) уравнение высоты PQ и её длину; 5) уравнение медианы MS; 6) уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно стороне MN. Сделать чертеж.

41. M (-5,9); N (7,0); P (5,14).

42. M (8,0); N (-4,-5); P (-8,-2).

43. M (0,5); N (12,0); P (18,8).

44. M (-1,7); N (11,2); P (17,10).

45. M (5,8); N (-2,9); P (-4,5).

46. M (6,1); N (-6,-4); P (-10,-1).

47. M (-1,5); N (11,0); P (17,8).

48. M (6,5); N (-6,0); P (-10,3).

49. M (1,5); N (13,0); P (13,8).

50. M (7,1); N (-5,-4); P (-9,-1).

<u>Тема №3. Предел функиии.</u>

В задачах 51-60 найти указанные пределы функций.

51. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-x}{2x-\sqrt[3]{x}},\quad \lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x+1}{x^3+1},\quad \lim_{x\to2}\frac{2-x}{\sqrt{x+2}-2},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x^2},\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-1}\right)^{x},\quad \lim_{x\to0}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

52. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x^2}{x^2+x+1}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2+x-3}{2x^2+x-3}$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x+\sqrt{10+x}}{x+1}$,

$\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(2x\cdot\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-3}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{2x+7}{3x+5}\right)^{\frac{x}{x-2}}$.

53. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x+1}}$, $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+2x-4}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-1}$,

$\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}/2-\cos x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x+4}{2x^2-3}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x+5}{4x+4}\right)^{\frac{x}{1-x}}$.

54. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x-4}{7+6x-13x^2}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-2x-8}{x^3-8}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{7}}{x-2}$,

$\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\pi/3\right)}{1-2\cos x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to-2}(x+3)^{\frac{1}{x+2}}$.

55. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x^5}{x^4+7x^5+x+1}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x-4}{x^2+3x-4}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$,

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sin\frac{x\pi}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+10}{x-1}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2+3}{2x+2}\right)^{\frac{x}{x-1}}$.

56. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^5-x-1}}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-7x+10}$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2x+3}-1}$,

$\lim\limits_{x\to2}\sin\dfrac{x-2}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{3x^2+5}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{3x-4}{x^2-8}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

57. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+\sqrt{x^3+3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}}$, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-3x^2+2x-6}{2x^3-10x-24}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x+6}-4}{\sin(x-2)}$,

$\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}2x}$, $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{2\sin x-\sqrt{3}}{1+\cos 3x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x+x^2}\right)^x$.

58. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+1}{x^2+x-3}$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-4x-7}{2x+2}$, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x+7}-4}{x-3}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-4}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to1}(5x-4)\dfrac{1}{x-1}$.

59. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+8x-7x^2}{81-4x+12x^2}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x}-2}{\sin(x-1)}$,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+5}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{1}{x-2}}$.

60. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-2x+x^2-3x^3}{5+x+2x^2+2x^3}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+9}-3}{1-\cos 7x}$, $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-x-20}{2x^2-5x-25}$,
$\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\pi/3\right)}{1-2\cos x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+2x^2}{1+2x^2}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x+3}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Тема №4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

В задачах 61-70 найти $\dfrac{dy}{dx}$ *и* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ указанной функции.

61. $y=\operatorname{ctg}(1-\ln x)$.
62. $y=(\sin\ln x)^2$.
63. $y=\arcsin\sqrt{x}$.
64. $y=\cos 2^x$.
65. $y=\sqrt{\operatorname{ctg} x}$.
66. $y=\sin(x+\ln x)$.
67. $y=\operatorname{arc\,tg}^2(4x+1)$.
68. $y=5^{\operatorname{arcctg} x}$.
69. $y=\left(1+\sin^2 x\right)^{-1}$.
70. $y=(1-\cos^3 x)^{-2}$.

Тема №5. Приложения дифференциального исчисления.

В задачах 71-80 провести полное исследование функции и построить её график.

71. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.
72. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.
73. $y=x+\dfrac{1}{x-1}$.
74. $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$.
75. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.
76. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$.
77. $y=2x-3\cdot\sqrt[3]{x^2}$.
78. $y=3\sqrt[3]{x^2}-2x$.
79. $y=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$.
80. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$.

Средствами дифференциального исчисления решить задачи 81-90 (задачи на экстремум).

81. Через точку A(3,5) провести прямую с отрицательным угловым коэффициентом так, чтобы площадь треугольника, образованного ею с осями координат была наименьшей.

82. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC=a и углом при основании α. На стороне BC найти точку E так, чтобы параллелограмм АДEF, у которого точки Д и F лежат соответственно на стороне AB и AC имел наибольшую площадь.

83. Нужно построить здание с площадью основания 96м^2. Известно, что метр стены по фасаду будет стоить в два раза дороже метра других стен. Каковы должны быть размеры здания, чтобы стоимость возведения стен была наименьшей?

84. Два самолета летят в одной плоскости и прямолинейно под углом 120^0 с одинаковой скоростью V км/час. В некоторый момент один самолет пришел в точку пересечения линий движения, а второй не дошел до неё a км. Через сколько времени расстояние между самолетами будет наименьшим и чему равно это расстояние?

85. Завод Д нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен город А. Расстояние ДВ до железной дороги равно a, расстояние АВ по железной дороге равно ℓ. Стоимость перевозок по шоссе в m раз дороже (m>1) стоимости перевозок по железной дороге. Как провести шоссе ДР к железной дороге, чтобы стоимость перевозок от завода к городу была наименьшей?

86. Для выполнения сельскохозяйственных работ трактору необходимо переехать с поля A на другое B, предварительно пополнив запасы горючего на шоссе. Расстояние AM от поля до шоссе равно 2 км. Расстояние BN от поля B до шоссе равно 1,5 км. Шоссе прямолинейное, MN=3,5км. В каком месте шоссе должен ожидать бензовоз, чтобы путь трактора от поля A до поля B был наименьшим?

87. Испытания двигателя привели к n различным значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ исследуемой величины A. Обычно в качестве значения неизвестной величины A принимают такое значение x, при котором сумма квадратов его отклонений от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет наименьшее значение. Найти x, удовлетворяющее этому требованию.

88. Известно, что прочность балки с прямоугольным поперечным сечением прямо пропорциональна ширине и квадрату толщины. Найти ширину бруска наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна диаметром 16 см.

89. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его веса. Исследовать, как изменится стоимость бриллианта, если его разрезать на две части. Сделать обобщающий вывод для n частей.

90. От канала шириной 4м под прямым углом к нему отходит другой канал шириной 2м. Какой может быть длина бревна, чтобы его можно было сплавить по этим каналам из одного в другой (толщину бревна не учитывать).

<u>Тема №6. Неопределенный интеграл.</u>

В задачах 91-100 требуется найти неопределенные интегралы. Результат первого интегрирования проверить дифференцированием.

91. $\int \frac{\ln x dx}{x\left(1-\ln^2 x\right)}$, $\int \sqrt{x} \ln x$, $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx$, $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$.

92. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$, $\int x \sin 3x$, $\int \frac{\sqrt[3]{2x+5}}{1+\sqrt[3]{2x+5}} dx$, $\int \sqrt{4-x^2} dx$.

93. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cdot \cos x} dx$, $\int x e^{1-2x} dx$, $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx$, $\int x^2 \sqrt{9+x^2} dx$.

94. $\int e^x \sin\left(1-e^x\right) dx$, $\int \arcsin 3x dx$, $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx$, $\int \sqrt{4+x^2} dx$.

95. $\int \frac{dx}{x \ln x}$, $\int x^2 e^x dx$, $\int \frac{x^3}{\sqrt{x+1}} dx$, $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

96. $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$, $\int \operatorname{arctg} 2x dx$, $\int x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$, $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$.

97. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$, $\int \ln x dx$, $\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^4}}$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

98. $\int \frac{\sin 2x dx}{(1+2\cos 2x)^2}$, $\int x \ln x dx$, $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3} dx$, $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$.

99. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+10} dx$, $\int \ln\left(x^2+1\right) dx$, $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$.

100. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(2+5 \operatorname{tg} x\right)}$, $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$, $\int \frac{3\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}+1}{x\left(\sqrt{x}+1\right)} dx$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

<u>Тема №7. Определенный интеграл.</u>

В задачах 101-110 вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

101. $y=4-x^2, y=x^2-2x$. 102. $y=x^2, y=\frac{x^2}{2}, y=3x$.

103. $y = 6x - x^2, y = 0$.

104. $y^2 = 2x + 1, x - y = 1$.

105. $y = x^2, y = \sqrt{x}$.

106. $y^2 + 8x = 16, y^2 - 24x = 48$.

107. $y = x^2, y = \dfrac{x^3}{3}$.

108. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}, y = \dfrac{x^2}{2}$.

109. $y = x^3, y = 8, x = 0$.

110. $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$.

Контрольная работа №2.

Тема №8. Функции нескольких переменных (ФНП).

В задачах 111-120 число A вычислить приближенно с помощью дифференциала функции двух переменных.

111. $A = \sqrt[5]{(2{,}97)^3 + (2{,}02)^2 + 1}$.

112. $A = \sqrt{(0{,}9)^2 + (2{,}1)^2 - 1}$.

113. $A = (0{,}98)^2 + \sqrt{1{,}04}$.

114. $A = \operatorname{arctg}\dfrac{(1{,}04)^2}{0{,}98}$.

115. $A = \dfrac{2{,}01}{(2{,}99)^2 + (2{,}01)^4}$.

116. $A = \dfrac{4{,}98}{(4{,}98)^3 - (5{,}03)^2}$.

117. $A = \ln\left(\sqrt[3]{1{,}02} + \sqrt{3{,}99} - 2\right)$.

118. $A = \ln\left((0{,}1)^2 + \sqrt{1{,}2}\right)$.

119. $A = \sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$.

120. $A = \sqrt{(5{,}01)^2 + (3{,}98)^2 + 8}$.

В задачах 121-130 найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области D, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

121. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, D: $x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$.

122. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, D: $y = x^2, y = 4, x \geq 0$.

123. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3$, D: $y = 0, x = 2, y = x+2$.

124. $z = x^2 - 2xy + 3y^2 + 3$, D: $y = 0, y = 4 - x^2$.

125. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$, D: $x = 0, y = 0, x + y = 3$.

126. $z = x^2 - y^2 + 4xy - 6x - 2y$, D: $x = 0, y = 0, x + y = 4$.

127. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, D: $x = 0, y = 0, x + y = 5$.

128. $z = 4x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1$, D: $x = 0, y = 0, x + y = -2$.

129. $z = x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y$, D: $y = x + 2, y = 0, x = 2$.

130. $z = x^2 - y^2 + 2xy - x$, D: $y = x + 1, y = 0, x = 3$.

В задачах 131-140 найти производную скалярной функции $u(x, y, z)$ в точке M по направлению нормали к поверхности S, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz. Найти величину и направление наибольшего изменения скалярной функции в указанной точке

131. $u = 4\ln\left(3 + x^2\right) - 8xyz,\quad S:\ x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1,\quad M(1,\ 1,\ 1)$.

132. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z},\quad S:\ 4\mathrm{z} + 2x^2 - y^2 = 0,\quad M(2,\ 4,\ 4)$.

133. $u = -2\ln\left(x^2 - 5\right) - 4xyz,\quad S:\ x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1,\quad M(1,\ 1,\ 1)$.

134. $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2},\quad S:\ z^2 = x^2 + 4y^2 - 4,\quad M\left(-2,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$.

135. $u = xz^2 - \sqrt{x^3y},\quad S:\ x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0,\quad M(2,\ 2,\ 4)$.

136. $u = x\sqrt{y} - yz^2,\quad S:\ x^2 + y^2 = 4z,\quad M(2,\ 1,\ \text{-}1)$.

137. $u = 7\ln\left(1/13 + x^2\right) - 4xyz,\quad S:\ 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7,\quad M(1,\ 1,\ 1)$.

138. $u = \mathrm{arctg}(y/x) - 8xyz,\quad S:\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 10,\quad M(2,\ 2,\ \text{-}1)$.

139. $u = \ln\left(1 + x^2\right) - xy\sqrt{z},\quad S:\ 4x^2 - y^2 + z^2 = 16,\quad M(1,\ \text{-}2,\ 4)$.

140. $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z,\quad S:\ x^2 + y^2 = 24z,\quad M(3,\ 4,\ 1)$.

Тема №9. Кратные интегралы.

В задачах 141-150 требуется построить область интегрирования, изменить порядок интегрирования и вычислить интегралы в обоих случаях.

141. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}(x-3)} dy.$

142. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 dx.$

143. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{\frac{4}{3}y} dx + \int\limits_3^5 dy \int\limits_0^{\sqrt{25-y^2}} dx.$

144. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} dy.$

145. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} dy.$

146. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} dx.$

147. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x} dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} dy.$

148. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} dy.$

149. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy.$

150. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-2-y}^{0} dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} dx.$

В задачах 151-160 требуется вычислить двойные интегралы по области D, ограниченной указанными линиями, переходя к полярным координатам.

151. $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy, \quad D: x^2 + y^2 = R^2,\ y = \sqrt{3}x.$

152. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy, \quad D: x^2 + y^2 = \pi^2,\ x^2 + y^2 = 4\pi^2.$

153. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy, \quad D: x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x.$

154. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy, \quad D: x^2 + y^2 = 2ay.$

155. $\iint\limits_D dxdy, \quad D: y = 0,\ y = x,\ x^2 + y^2 = 2x.$

156. $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy, \quad D: x^2 + y^2 = R^2.$

157. $\iint\limits_D dxdy, \quad D: \left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2y^2.$

158. $\iint\limits_D dxdy, \quad D: \left(x^2 + y^2\right)^3 = x^4 + y^4.$

159. $\iint\limits_D dxdy, \quad D: \left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right).$

160. $\iint\limits_D dxdy, \quad D: \left(x^2 + y^2\right)^2 = 2ax^3,\ a > 0.$

Тема №10. Комплексные числа.

В задачах 161-170 требуется выполнить действия над комплексными числами. Результаты записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Изобразить геометрически.

161. $\dfrac{1+j\sqrt{3}}{2+2j}$; $\left(\dfrac{-1+j\sqrt{3}}{2}\right)^{60}$; $\sqrt[4]{1}$.

162. $\left(-1+j\sqrt{3}\right)\cdot(2+2j)\cdot(-1+j)$; $\left(\dfrac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^{100}$; $\sqrt{3-4j}$.

163. $\dfrac{\cos\pi+j\sin\pi}{\cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3}}$; $\left(\dfrac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)^{60}+\left(\dfrac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)^{30}$; $\sqrt[3]{-1}$.

164. $\dfrac{\cos 45^0+j\sin 45^0}{2\left(\cos 15^0+j\sin 15^0\right)}$; $(-3+4j)^3$; $\sqrt{2+2j}$.

165. $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+j\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+j\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$; $\left(2+j\sqrt{3}\right)^3$; $\sqrt[4]{j}$.

166. $\dfrac{1}{j}$; $(1+j)^4$; $\sqrt[4]{-1}$.

167. $\dfrac{1-j}{1+j}$; $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^6+\left(\dfrac{j-\sqrt{3}}{2}\right)^6$; $\sqrt[3]{-8}$.

168. $\dfrac{2}{1-3j}$; $\dfrac{(1+j)^5}{(1-j)^3}$; $\sqrt[5]{2+2j}$.

169. $\dfrac{-\sqrt{2}+j\sqrt{6}}{-1+j\sqrt{3}}$; $\left(1+j\sqrt{3}\right)^3$; $\sqrt[4]{1+j}$.

170. $\dfrac{5-j\sqrt{2}}{1+j\sqrt{2}}$; $\left(\dfrac{j^5+2}{j^{19}+1}\right)^2$; $\sqrt[3]{1-j}$.

<u>Тема №11 Обыкновенные дифференциальные уравнения (ДУ).</u>

В задачах 171-180 найти общие решения указанных дифференциальных уравнений (ДУ). Последнее ДУ решить двумя способами – методом вариации произвольных постоянных и методом неопределенных коэффициентов (по виду правой части). Для первого ДУ найти интегральную кривую, проходящую через точку (1;1).

171. $y' + \frac{y}{x+1} = \frac{x}{x+1}$; $y'' + y = 4e^x$.

172. $xy' + 2y = 3x$; $y'' - 4y' = x^2 + 2x + 3$.

173. $y' + xy = -x^3$; $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

174. $y' - 4xy = -4x^3$; $y'' - 4y' = 8x^3$.

175. $y' + e^x y = e^{2x}$; $y'' - y' + y = 8e^x$.

176. $xy' - y = -2\ln x$; $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}$.

177. $2xy' + y = 2x^3$; $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$.

178. $xy' + y = x + 1$; $y'' + 9y = \cos 3x$.

179. $x^3 y' + 3x^2 y = 2$; $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

180. $xy' - y = x^3$; $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.

Тема №12. Числовые и степенные ряды.

В задачах 181-190 найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на границах интервала.

181. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{5^n \cdot \sqrt{n}}$. 182. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+1)\cdot 2^{n-1}}$. 183. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n(n+1)}$.

184. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{4^{n+1}}$. 185. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(2n-1)6^n}$ 186. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{5n-3}$.

187. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n}$. 188. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}$. 189. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$. 190. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$.

В задачах 191-200 вычислить с точностью до 0,001 определенный интеграл разложением подынтегральной функции в ряд Маклорена.

191. $\int_0^1 x\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$. 192. $\int_0^{1/4} x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$. 193. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}$.

194. $\int_0^{1/4} e^{x^2}\,dx$. 195. $\int_0^{1/2} \cos\sqrt{x}\,dx$. 196. $\int_0^{1/\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$.

197. $\int\limits_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^3}}$. 198. $\int\limits_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. 199. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$. 200. $\int\limits_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}dx$.

Тема №13. Теория вероятностей.

201. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7; для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что:1) только один из стрелков поразит цель; 2) только два стрелка поразят цель; 3) все три стрелка поразят цель.

202. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8; для второго и третьего орудия эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что: 1) только один снаряд поразит цель; 2) только два снаряда поразят цель; 3) все три снаряда поразят цель.

203. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,9. Найти вероятность того, что: 1) оба стрелка поразят мишень; 2) оба стрелка промахнутся; 3) только один стрелок поразит мишень; 4) хотя бы один из стрелков поразит мишень.

204. От аэровокзала отправились 2 автобуса – экспресса к трапам самолетов. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса в аэропорт равна 0,95. Найти вероятность того, что: 1) оба автобуса придут вовремя; 2) оба автобуса опоздают; 3) только один автобус прибудет вовремя; 4) хотя бы один автобус прибудет вовремя.

205. На участке две бригады. Вероятность выполнения плана первой бригадой равна 0,8; а вероятность выполнения плана второй 0,9. Требуется найти: 1) вероятность выполнения плана участком; 2) вероятность выполнения плана только одной бригадой участка; 3) вероятность выполнения плана хотя бы одной бригадой участка.

206. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент даст правильный ответ на первый вопрос равна 0,9; вероятность правильного ответа на второй вопрос равна 0,8; на третий вопрос равна 0,7. Найти вероятность того, что студент ответит: 1) на все три вопроса правильно; 2) хотя бы на два вопроса.

207. Передающее устройство, канал связи и принимающее устройство могут быть повреждены. Вероятности повреждения соответственно равны 0,5; 0,4; 0,6. Найти вероятность того, что: 1) будет повреждено хотя бы одно; 2) хотя бы одно не будет повреждено; 3) система будет работать.

208. Коэффициенты использования рабочего времени у двух комбайнов соответственно равны 0,8 и 0,6. Считая, что остановки в работе каждого комбайна возникают случайно и независимо друг от друга, определить относительное время: 1) совместной работы комбайнов; 2) работы только одного комбайна; 3) простоя обоих комбайнов.

209. Рабочий обслуживает три станка. Известно, что вероятность бесперебойной работы на протяжении одного часа после наладки равна для первого станка 0,9; для второго станка 0,8 и для третьего станка 0,7. Найти вероятность того, что за этот час: 1) лишь один станок откажет в работе и потребует вмешательства рабочего; 2) два станка потребуют вмешательства рабочего; 3) ни один станок не потребует вмешательства рабочего.

210. На ферме две бригады. Вероятность выполнения плана первой бригадой 0,7; второй 0,8. Найти вероятность: 1) выполнения плана фермой; 2) выполнение плана только одной бригадой; 3) выполнения плана хотя бы одной бригадой?

211. В группе 6 отличников, 10 хорошистов и 9 троечников. На экзамене отличники могут получить оценку «4» с вероятностью 0,3; хорошисты с вероятностью 0,8; троечники – с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что студент, вызванный первым, получит оценку «4».

212. При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 4 группы. К зернам 1-й группы принадлежит 96%, ко второй 2%, к 3-й 1%, к 4-й 1% всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен для 1-й группы равна 0,5; 2-й группы 0,2; 3-й группы 0,18; 4-й группы 0,02. Найти вероятность того, что из взятого наугад зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

213. Брак в продукции завода вследствие дефекта А составляет 5%, причем среди забракованной продукции по признаку А в 10% случае встречается дефект В, а в продукции свободной от дефекта А, дефект В встречается в 1% случаев. Найти вероятность того, что дефект В не встретится во всей продукции.

214. Изделие проверяется на стандарт одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу равно 0,55; а ко второму 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет принято первым товароведом равно 0,9; а вторым 0,98. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие будет признано стандартным.

215. На сборку поступают детали с 2-х автоматов. Первый дает в среднем 0,2% брака, второй 0,1%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 2000 деталей, а со второго – 3000.

216. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложено 2 шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.

217. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъезжает машина. Найти вероятность того, что машина будет заправляться.

218. В вычислительной лаборатории имеются 6 новых и 4 старых машин. Вероятность того, что за выполнение некоторого расчета новая машина не выдаст ошибку равна 0,95; для старой машины эта вероятность равна 0,8. Студент проводит расчет на удачу выбранной машине. Найти вероятность того, что машина не выдаст ошибку.

219. Исследование больного вызвало предположение о возможности одного из 3-х заболеваний A_1 A_2 A_3 с вероятностями: $P(A_1)=5/12$; $P(A_2)=1/3$; $P(A_3)=1/4$. Для уточнения диагноза был произведен некоторый анализ, который при первом заболевании дает положительный ответ с вероятностью 0,8; при втором – с вероятностью 3/8; при третьем – с вероятностью 1/6. Какова вероятность точного ответа.

220. В партии 600 лампочек: 200 штук изготовлены на 1-м заводе, 250 – на 2-м; 150 – на 3-м. Вероятность того, что лампочка окажется стандартной для 1-го завода, равна 0,97; для второго 0,91; для третьего 0,93. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется стандартной.

221. Устройство состоит из 3-х независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить ряд и функцию распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Найти математическое ожидание и дисперсию. Вычислить вероятность того, что откажут не менее двух элементов. Проиллюстрировать геометрически.

222. В партии из шести деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить ряд и функцию распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Найти числовые характеристики. Вычислить вероятность того, что число стандартных деталей не меньше двух.

223. Выпущено 1000 билетов лотереи, причем разыгрываются: один выигрыш в 50 руб., 5 выигрышей по 25 руб., 10 выигрышей по 10 руб., 25 выигрышей по 5 руб. Составить ряд и функцию распределения стоимости выигрыша для владельца одного билета. Найти «справедливую» цену одного билета.

224. На поле 5 тракторов. Надежность (т.е. вероятность безотказной работы) каждого равна 0,8. Составить ряд и функцию распределения числа тракторов, работающих одновременно. Найти среднее число исправных тракторов. Вычислить вероятность того, что исправных тракторов больше 3. Показать графически.

225. В связке имеется 5 различных ключей, из которых только одним можно открыть дверь. Наудачу выбирается ключ и делается попытка открыть им дверь. Ключ, оказавшийся неподходящим больше не используется. Построить ряд и функцию распределения числа использованных ключей. Найти вероятность того, что: а) дверь будет открыта вторым ключом; б) будет использовано не меньше двух ключей. Показать графически.

226. Вероятность того, что из яйца выведется петушок, равна 0,6. В инкубатор заложили 6 яиц. Найти ряд и функцию распределения числа петушков, которые выведутся из этих 6 яиц. Вычислить вероятность того, что число петушков не меньше 5.

227. Имеется 5 семян редкого растения со всхожестью 60%. Семена высеян по очереди (каждое следующее высевается только в том случае, если предыдущее не взошло). Составить ряд и функцию распределения числа использованных семян. Найти вероятность того, что число использованных семян больше 1 и меньше 3. Проиллюстрировать графически. Найти среднее число использованных семян.

228. Производится последовательное испытание 5 приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд и функцию распределения случайного числа ис-

пытанных приборов, если вероятность выдержки испытания для каждого из них равна 0,9. Найти вероятность того, что придется испытывать не менее 2 и не более 4 приборов.

229. При бросании трех игральных костей игрок выигрывает: 18 руб., если на всех костях выпадает по 6 очков; 1 руб. 40 коп., если на двух костях выпадает по 6 очков и по 20 коп., если на одной кости выпадает 6 очков. Какова должна быть ставка за участие в игре, чтобы игра была безобидной. Построить ряд и функцию распределения выигрыша.

230. Выпущено 10000 билетов денежной лотереи. Разыгрывается 2 выигрыша по 5000 рублей, 8 по 1000, 170 по 100 рублей, 350 по 50 рублей и 750 по 10 рублей. Составить ряд и функцию распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Вычислить «справедливую» цену одного билета.

В задачах 231-340 заданы математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины ξ. Найти: 1) вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения ξ - a окажется меньше δ.

231.	a=15	σ=2	α=9	β=19	δ=3
232.	a=14	σ=4	α=10	β=20	δ=4
233.	a=13	σ=4	α=11	β=21	δ=8
234.	a=12	σ=5	α=12	β=22	δ=10
235.	a=11	σ=4	α=13	β=23	δ=6
3236.	a=10	σ=8	α=14	β=18	δ=2
237.	a=9	σ=3	α=9	β=18	δ=6
238.	a=8	σ=4	α=8	β=12	δ=8
239.	a=7	σ=2	α=6	β=10	δ=4
240.	a=6	σ=2	α=4	β=12	δ=4

Тема №18. Математическая статистика.

В задачах 241-250 предполагается, что проведен некоторый эксперимент, в результате которого получен набор данных.

Требуется:

1. Построить вариационный ряд частот или относительных частот;
2. Изобразить геометрически вариационный ряд, построив гистограмму частот;
3. Вычислить точечные оценки параметров распределения;
4. Высказать гипотезу о виде закона распределения признака и применить критерий согласия хи-квадрат Пирсона на 5%-м уровне значимости;
5. Считая полученный набор данных генеральной совокупностью, сделать из этой совокупности выборку объема 10, для которой:

а) вычислить точечные оценки параметров распределения – выборочную среднюю арифметическую $\overline{X}(10)$ и исправленную выборочную дисперсию $\overline{S^2}(10)$, сравнить полученные значения с соответствующими характеристиками генеральной совокупности;

б) найти доверительный интервал для генеральной средней на уровне значимости α =0,05 при неизвестной и известной дисперсии;

в) найти доверительный интервал для генеральной дисперсии.

241. Техническая длина стебля (см) у ста растений льна характеризуется таблицей:

90,1	109,9	99,1	100,1	115,3	68,0	70,4	72,3	73,0	70,1
76,2	82,2	80,0	68,4	69,4	74,4	72,2	69,4	80,0	59,2
79,9	81,4	84,0	108,2	83,3	81,7	99,4	98,0	102,2	101,7
45,5	59,1	60,1	63,3	78,2	87,0	94,7	91,5	88,2	90,1
72,4	68,5	80,7	81,2	84,4	77,0	79,8	81,6	84,3	50,2
70,7	67,0	100,4	103,4	69,0	72,4	74,4	66,1	67,3	52,0
79,1	78,0	83,9	92,2	93,2	81,3	82,0	86,4	89,1	93,5
77,0	76,1	88,1	89,7	94,1	82,0	80,1	81,0	77,0	80,0
92,1	91,5	76,7	79,0	73,5	84,4	79,7	84,0	79,6	84,1
89,4	85,4	93,1	90,0	79,0	83,0	91,0	87,2	80,3	54,7

242. Выработка продукции предприятиями в сравнении с предыдущей пятилеткой дается таблицей (в %):

136	146	123	144	138	127	152	140	126	166	159	148	146
140	124	141	134	143	138	150	126	143	137	155	142	141
138	114	142	152	146	139	135	132	118	130	154	138	137
134	150	161	142	132	135	140	157	131	140	136	128	158
138	158	126	137	128	139	132	120	143	134	145	133	141
133	145	131	145	139								

243. Количество деталей, выработанных каждым из 100 рабочих в течение месяца:

245	225	245	255	259	213	277	266	243	257
236	248	271	269	282	285	263	239	253	274
222	259	262	234	292	268	254	202	238	231
228	257	242	251	226	236	235	265	265	246
217	265	252	216	279	261	266	251	241	254
269	269	273	246	245	242	295	266	279	255
232	263	248	243	249	274	252	243	269	249
207	255	253	265	279	232	278	268	279	231
287	249	268	266	213	254	255	249	255	282
253	268	238	294	246	252	263	292	248	275

244. 100 сверл были подвергнуты испытанию на твердость. При этом фиксировалась твердость лапки. Результаты испытания представлены в таблице:

36,1	37,2	31,2	38,6	34,1	37,2	35,1	36,9	30,6	37,2

34,3	35,2	30,9	35,3	36,1	39,3	32,7	34,6	36,8	39,2
28,4	30,1	35,1	36,7	38,2	40,7	36,8	39,3	32,7	37,1
29,3	28,3	40,3	34,6	37,3	32,1	41,3	33,3	40,4	34,8
37,1	41,2	39,4	35,4	36,8	35,4	34,7	34,7	43,3	41,2
35,4	40,8	37,0	39,1	33,2	39,2	37,3	41,2	45,0	33,4
34,7	39,3	36,9	32,8	34,8	36,8	38,4	37,0	40,6	42,1
38,1	36,7	33,4	38,6	36,9	32,7	31,2	32,4	41,3	30,3
39,3	37,3	32,5	34,4	39,3	33,1	33,4	38,3	43,4	35,4
36,8	32,0	39,4	36,3	35,4	37,3	34,7	32,4	36,7	39,0

245. В институте 80 групп студентов (по 30 человек в каждой). Во всех группах проведена контрольная работа по математике. Сумма баллов, полученных каждой группой, дается в таблице:

128	131	105	110	100	132	136	130	119	43	58
83	142	135	75	106	115	143	125	96	123	136
122	122	123	77	129	70	91	50	56	138	129
104	101	117	112	135	86	86	134	122	145	108
115	132	139	113	86	138	130	77	119	109	127
109	149	107	82	126	131	139	85	129	100	140
130	47	125	100	78	141	132	114	130	123	125
106	131	61	108	104	118	92	97	118	118	138

246. Выход валовой продукции на 1 га с.х. угодий в (руб.) дается следующей таблицей (для нескольких хозяйств):

535	278	312	368	327	482	318	531	554	898
1030	390	334	423	393	1081	493	698	312	605
372	454	379	294	343	365	341	459	278	449
435	250	443	447	375	271	727	334	327	501
273	871	390	582	469	448	274	495	357	546
296	303	301	1070	473	713	666	357	625	588
596	312	279	351	373	389	333	260	386	1081
410	335	457	710	423	428	503	399	359	320
364	1031	396	315	479	284	333	344	610	381
294	414	313	549	289	686	325	662	710	351

247. Исследователь, изучающий выработку на одного рабочего в % к предыдущему году, получил данные:

111	85	85	91	101	109	86	102	111	98	105	85
98	112	113	87	109	109	115	92	105	111	94	107
99	107	89	104	113	96	103	145	104	105	88	103
97	115	109	108	107	97	106	107	96	109	116	109
117	108	109	116	117	103	127	119	118	125	105	116
117	106	101	107	105	119	107	119	111	112	129	113
106	104	106	123	108	93	105	106	139	108	109	93
107	99	108	108	119	98	108	101	109	109	128	128
127	118	122	116	124	125	114	126	131	141	149	98

248. Имеются данные о дневном сборе клубники 50 колхозников (кг):

16,1	17,3	18,4	19,1	16,8	17,2	18,0	18,7	21,3	16,4
15,3	16,4	18,0	17,4	18,0	18,7	20,9	17,0	18,4	20,2
17,3	18,9	18,6	20,9	20,3	22,0	17,4	18,0	17,4	15,6
19,1	21,9	15,7	17,6	16,1	15,6	20,7	17,5	18,3	19,0
17,2	19,9	17,5	19,2	19,7	19,8	17,4	16,6	18,3	19,3

249. Контрольные обмеры диаметра валиков дали следующие результаты – приведены два десятичных знака после запятой, целая часть равна 7мм:

39	43	54	64	40	55	26	42	50	32	31	28	52	46
63	38	44	52	53	37	33	24	13	53	53	39	57	51
34	39	47	51	48	62	58	57	33	51	40	30	48	40
57	51	40	52	56	40	34	23	37	48	48	62	35	36
40	45	29	48	58	44	56	28	59	47	62	54	20	38

250. Контрольные обмеры диаметров шариков дали следующие результаты (указаны знаки после запятой) целая часть равна 5мм:

61	55	69	55	67	59	67	55	66	57	80	68	72	53
74	42	62	42	72	64	60	69	43	60	65	68	39	50
66	63	62	46	70	82	68	65	61	54	48	58	62	59
58	45	63	57	74	50	62	57	66	59	76	60	52	41

В задачах 251-260 по данным задачи надо реализовать схему однофакторного дисперсионного анализа.

251. Имеются результаты конкурсного сортоиспытания озимой пшеницы (урожайность в ц/га). Изучить влияние сорта на урожайность. Уровень значимости α=0,05.

Сорт	Повторности			
	1	2	3	4
Гибрид	32,2	32,7	30,7	33,3
Новоукраинка 84	35,2	35,2	32,2	33,8
Безостая 4	45,7	44,2	43,7	44,0
Скороспелка 3	42,5	54,5	35,7	53,7
Приазовская	36,8	37,0	38,0	37,8

252. На уровне значимости α=0,05 исследовать влияние предшественника на урожайность озимой пшеницы Новоукраинка 84.

Предшественник	Повторности			
	1	2	3	4
Черный пар	35,2	35,2	32,2	33,8
Подсолнечник	42,4	37,4	40,7	38,2
Пласт трав	32,4	33,3	34,8	34,6

253. На уровне значимости α=0,05 исследовать влияние магазина на товарооборот за полгода (млн. руб., товары одного вида).

Магазин	Месяц					
	1	2	3	4	5	6
1	19	23	26	18	20	20
2	20	20	32	27	40	24
3	16	15	18	26	19	17

254. На уровне значимости α=0,05 исследовать влияние возраста на содержание иммуноглобулина в сыворотке крови (в мг %).

Возрастная группа	Повторности			
	1	2	3	4
1	84	85	85	86
2	86	87	87	87
3	89	90	90	91

255. На химическом заводе разработаны два новых варианта технологического процесса. Чтобы оценить, как изменится дневная производительность труда, завод в течение 5 дней работает по каждому варианту, включая существующий. Методом дисперсионного анализа на уровне значимости 0,01 исследовать влияние технологического процесса на дневную производительность завода (в условных единицах).

Технологическая схема	День работы				
	1	2	3	4	5
Существующая	46	48	73	52	72
Вариант 1	74	82	64	72	84
Вариант 2	52	63	72	64	48

256. На заводе разработаны три варианта технологического процесса и в течение 5 дней завод работает по каждому процессу. На уровне значимости α=0,01 исследовать влияние технологии на дневную производительность завода (в условных единицах).

Технологический процесс	День работы				
	1	2	3	4	5
Вариант 1	44	66	46	60	48
Вариант 2	68	76	88	70	60
Вариант 3	70	78	68	70	54

257. Из группы полевых транзисторов взяты три выборки: в начале месяца, в середине и в конце. Выяснить на уровне значимости α=0,01 влияние срока изготовления на результаты измерения емкости (в пикафар.).

Срок изготовления	Повторности				
	1	2	3	4	5

Начало месяца	2,8	3,2	2,9	3,5	3,3
Середина месяца	3,1	3,2	3,3	3,4	3,7
Конец месяца	3,6	2,8	3,0	3,2	3,0

258. На уровне значимости α=0,1 выяснить существенность влияния содержания катализатора на время химической реакции.

Содержание катализатора	Номер эксперимента				
	1	2	3	4	5
5%	5,9	6,0	7,0	6,5	5,5
10%	4,0	5,1	6,2	5,3	4,5
15%	8,2	6,8	8,0	7,5	7,0

259. Однотипные втулки обрабатывают на трех станках. Методом дисперсионного анализа исследовать зависимость диаметра этих втулок от типа станка. Уровень значимости α=0,05.

Тип станка	Повторности				
	1	2	3	4	5
1	2,066	2,063	2,068	2,060	2,067
2	2,063	2,060	2,057	2,056	2,059
3	2,063	2,059	2,062	2,062	2,060

260. В таблице приведен вес (кг) поросят, родившихся в различных опоросах. Методом дисперсионного анализа исследовать зависимость веса от номера опороса. Уровень значимости α=0,1.

Номер опороса	Повторности			
	1	2	3	4
1	0,8	1,12	1,32	1,28
2	1,4	1,12	1,28	1,4
3	1,32	1,44	1,04	1,24
4	1,28	1,32	1,28	1,16

В задачах 261-270 методом линейного корреляционного анализа исследовать зависимость результирующего признака Y от факторного признака X.

261. Исследовать зависимость между количеством осадков в мае – августе X (мм) и прибавкой урожая картофеля Y (ц/га)

X	280	210	120	150	150	200	290	140	160	130
Y	154	140	43	64	68	200	180	85	100	51

262. Исследовать зависимость между длиной колоса озимой пшеницы X (см) и числом зерен Y в колосе.

X	8	8,5	7,5	8,5	8	6	9	7	8	9
Y	33	29	26	31	29	24	26	25	28	34

263. Исследовать зависимость между успехами в чтении (X) и арифметики (Y) по данным таблицы, в которой представлены ряды оценок по тестам чтения и арифметики.

X	43	58	45	53	37	58	55	61	46
Y	32	25	28	30	22	25	22	20	20

264. Исследовать зависимость выхода продукта Y (кг/час) от температуры реакции X (^{0}C) на некотором химическом производстве.

X	51	32	80	73	64	45	83	44	93
Y	52,7	15,2	89,5	94,8	76	39,3	114,8	36,5	137,4

265. Исследовать зависимость издержек обращения Y (тыс. руб.) от величины розничного товарооборота магазинов X (млн. руб.).

X	0,48	0,51	0,53	0,54	0,57	0,59	0,62	0,64	0,65	0,66
Y	26	25	31	28	29	32	36	37	37	38

266. Исследовать зависимость выпуска продукции Y (тыс. руб.) от стоимости основных фондов X (тыс. руб.).

X	1295	1821	2109	2836	3454	4213	5192	5578
Y	1773	2614	2932	3310	4539	5931	6105	7243

267. Исследовать зависимость урожайности картофеля Y (ц/га) от уровня внесения органических удобрений X (т/га).

X	37	35	37	29	40	36	32	30	32	39
Y	205	194	192	190	188	185	182	180	175	175

268. Методом корреляционного анализа исследовать связь между средним доходом X на семью (тыс. долларов) и разводов Y на 1000 жителей. Данные взяты в 9 штатах США.

X	4,9	6,3	6,4	6,2	5,8	4,2	4,9	6,7	6,0
Y	1,2	1,1	0,4	2,4	2,7	1,2	1,5	3,1	1,9

269. Исследовать зависимость между производством X (тыс. тонн) и ценой Y (дол.) вишни с 1960 по 1969г. (данные министерства сельского хозяйства США).

X	185	266	276	150	344	248	200	198	228	278
Y	227	217	163	345	154	165	299	325	294	188

270. В таблице указаны уровни добычи угля в Англии (млн. тонн). Методом корреляционного анализа для первых 10 лет построить прямую регрессии. Последние три года использовать для сравнения прогноза с фактическим уровнем добычи.

Год X	1958	59	60	61	52	63	64	65	66	67	68	69	70
Уровень добычи Y	219	209	197	193	200	199	197	191	177	175	167	153	144

Решение типовых примеров.

Пример №1.(для задач 1-10). Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Напомним, что общий вид определителя третьего порядка следующий:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Числа a_{ij}, i=1, 2, 3; j=1, 2, 3, называются элементами определителя. Как видим, у всех элементов два индекса - первый индекс показывает номер строки, второй - номер столбца, на пересечении которых находится элемент. Обратим внимание на первую строку и в ней элемент a_{12}, который равен единице. С помощью соответствующего свойства определителей все элементы второго столбца (кроме a_{12}=1) обратим в нули.

Для этого сначала первую строку (все ее элементы!) умножим на (-2) и прибавим ко второй. Затем вновь первую строку умножим на (3) и прибавим к третьей. По свойству определителей от прибавления кратной строки определитель не меняется. Указанные преобразования обозначим следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) \quad (3) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ -5 & 0 & -4 \\ 9 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = -(-50+36) = 14.$$

Полученный определитель, у которого во втором столбце лишь один ненулевой элемент, разложили по второму столбцу.

Первая строка, которую мы умножали на числа и прибавили к другим (т.е. с которой мы работали), называется рабочей строкой, а элемент a_{12}=1, с помощью которого мы получали нули во втором столбце, называется разрешающим элементом.

Заметим, что это преобразование удобно для вычисления определителей высоких порядков.

Например, вычислим определитель четвертого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-3) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ 0 & -6 & 8 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -7 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

Далее вычисляем определитель третьего порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-7 & 7 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ -6 & 8 & 4\end{vmatrix}\begin{matrix}(2)\quad(4)\\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}-7 & 7 & -1\\ -11 & 15 & 0\\ -34 & 36 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}-11 & 15\\ -34 & 36\end{vmatrix}=$$

$$=-(-11\cdot 36-15(-34))=-114.$$

<u>Пример 2 (к задачам 11-20).</u> По формулам Крамера и методом Гаусса решить СЛАУ

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=5;\\ 2x_1+x_2+x_3=-1;\\ 3x_1-2x_2-3x_3=4.\end{cases}$$

<u>Решение.</u> Воспользуемся формулами Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Находим определитель матрицы системы разложением по первой строке:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=33.$$

$\Delta\neq 0$, следовательно, можно использовать выбранный метод решения. Вычисляем вспомогательные определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 4 & -2 & -3\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=5(-1)-3(-1)-(-2)=0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-1-5(-9)-(11)=33,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=2-3(11)+5(-7)=-66.$$

Определитель $\Delta_i(i=1,2,3)$ получен из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Итак, Δ = 33, Δ_1 = 0, Δ_2 = 33, Δ_3 = -66, следовательно, по формулам Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=0;x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{33}{33}=1;x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-66}{33}=-2.$$

Ответ: x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -2.

Решаем теперь методом Гаусса - расширенную матрицу A^* приводим к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, каковыми являются:

1. Перемена местами любых двух строк;
2. Умножение любой строки на любое число α, отличное от нуля;
3. Прибавление кратной строки.

В результате получаем матрицу, эквивалентную (равносильную) данной;
(~ - знак равносильности.)

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \end{array}\right)(-2)(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -11 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \end{array}\right)(-1/11) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -11 \end{array}\right)(5) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right)(1/3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Во-первых, обратим внимание на три числа: ранги матриц A и A^* R(A), $R(A^*)$ и число неизвестных n. В нашем примере все преобразования, проводимые с матрицей A^*, затрагивали одновременно и матрицу A - она отделена вертикальной чертой. Поэтому вместе с рангом матрицы A^* видим и ранг матрицы A, подсчитав число ненулевых строк ступенчатой матрицы, которая отделена вертикальной чертой.

Основополагающей теоретической базой является теорема Кронекера-Капелли, которую схематично можно записать так:

$\mathrm{R}(A) = \mathrm{R}(A^*) = n \Leftrightarrow$ система имеет единственное решение;

$\mathrm{R}(A) = \mathrm{R}(A^*) < n \Leftrightarrow$ система имеет бесчисленное множество решений;

$\mathrm{R}(A) < \mathrm{R}(A^*) \Leftrightarrow$ система решений не имеет (несовместна).

Итак, в нашем примере $\mathrm{R}(A) = \mathrm{R}(A^*) = n = 3$, следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система имеет единственное решение. Для решения сопоставим ступенчатой матрице систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Как видим, система решается просто, «снизу вверх»: $x_3 = -2$ и $x_2 = 1$.
Подставляем в первое уравнение и получаем $x_1 = 5 + x_3 - 3x_2 = 5 - 2 - 3 = 0$.

Итак, система имеет единственное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ – единственный вектор - решение $\bar{x}^\circ = (0,1,-2)$.

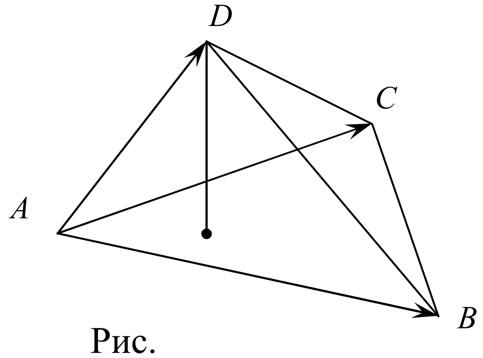


Рис.

Пример 3 (к задачам 21-30). Даны координаты пирамиды $ABCD$ (рис); $A(1,-4,0)$, $B(5,0,-2)$, $C(3,7,-10)$, $D(1,-2,1)$.

Найти: 1) косинус угла между ребрами *AB* и *AD*; 2) площадь грани *ABC*; 3) объем пирамиды *ABCD*; 4) длину высоты пирамиды, проведенной из точки *D*.

<u>Решение.</u> 1) Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, вычитая из координат конца вектора координаты начала. Получим: $\overline{AB}=(4,4,-2)$, $\overline{AD}=(0,2,1)$. Тогда, обозначив угол между ними через α, имеем

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AD}\right|}=\frac{4\cdot0+4\cdot2-2\cdot1}{\sqrt{16+16+4}\cdot\sqrt{0+4+1}}=\frac{6}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Итак, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

2) Обозначим площадь грани, т.е. треугольника *ABC*, через *S*. Из определения векторного произведения получаем $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=2S$, т.к. длина векторного произведения равна площади параллелограмма, т.е. удвоенной площади треугольника.

Найдем координаты вектора $\overline{AC}=(2,11,-10)$. По формуле для векторного произведения в координатной форме находим:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 4 & -2\\ 2 & 11 & -10\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}4 & -2\\ 11 & -10\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & -10\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}4 & 4\\ 2 & 11\end{vmatrix}=$$

$$=-18\bar{i}+36\bar{j}+36\bar{k}=\left(-18,36,36\right)=18\cdot\left(-1,2,2\right).$$

Итак, $\overline{AB}\times\overline{AC}=18\cdot\left(-1,2,2\right)$, тогда $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=18\cdot\sqrt{1+4+4}=18\cdot3=54$, следовательно, $S=27$.

3) Для нахождения объема *V* пирамиды сначала заметим, что $V=\dfrac{V_1}{6}$, где V_1 – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$, а для вычисления V_1 используется смешанное произведение этих векторов:

$$\left(\overline{AB},\overline{AD},\overline{AC}\right)=\begin{vmatrix}4 & 4 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 11 & -10\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}2 & 1\\ 11 & -10\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-108.$$

Определитель разложили по первому столбцу (т.к. там имеется нуль). Смешанное произведение оказалось отрицательным, поэтому $V_1=\left|-108\right|=108$, а $V=1/6\cdot108=18$. Итак, $V=18$.

4) Теперь легко определить высоту H пирамиды, т.к. $V=\dfrac{1}{3}SH$, откуда

$H=\dfrac{3V}{S}=\dfrac{3\cdot18}{27}=2$. Итак, $H=2$.

<u>Пример 4 (к задачам 31-40).</u> Даны координаты четырех точек $M(-1,1,-5)$, $N(3,5,-7)$, $P(1,12,-15)$, $Q(-1,3,-4)$. Требуется: 1) составить уравнение прямой *MN*; 2) составить уравнение плоскости *MNP*; 3) составить уравнение прямой, проходящей через точку *Q* перпендикулярную плоскости *MNP*; 4) найти точку пересечения этой прямой с плоскостью *MNP*; 5) найти расстояние от точки *Q* до плоскости *MNP* (двумя способами).

Решение. 1) Уравнение прямой *MN* напишем как уравнение прямой, проходящей через две точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\Rightarrow$

$$\frac{x-(-1)}{3-(-1)}=\frac{y-1}{5-1}=\frac{z-(-5)}{-7-(-5)}\Rightarrow\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+5}{-2} \text{ или } MN\text{: } \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{-1}.$$

2) Уравнение плоскости *MNP* запишем как уравнение плоскости, проходящей через три точки: $\begin{vmatrix} x-(-1) & y-1 & z-(-5) \\ 3-(-1) & 5-1 & -7-(-5) \\ 1-(-1) & 12-1 & -15-(-5) \end{vmatrix}=0\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+5 \\ 4 & 4 & -2 \\ 2 & 11 & -10 \end{vmatrix}=0\Rightarrow(x+1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 11 & -10 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}+$$

$$+(z+5)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}=0\Rightarrow(x+1)(-40+22)-(y-1)(-40+4)+$$

$$+(z+5)(44-8)=0\Rightarrow-18(x+1)+36(y-1)+36(z+5)=0\Rightarrow$$

$$x+1-2(y-1)-2(x+5)=0\Rightarrow MNP:\quad x-2y-2z-7=0.$$

3) Для написания уравнения прямой, проходящей через точку *Q* перпендикулярно плоскости *MNP*, воспользуемся уравнением прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ с опорной точкой (x_0, y_0, z_0) и направляющим вектором $\overline{S}=(l,m,n)$, взяв точку *Q* в качестве опорной точки, а в качестве направляющего вектора $\overline{S}$ искомой прямой вектор нормали плоскости *MNP*: $\overline{N}$=(1,-2,-2). Тогда получим:

$$\frac{x-(-1)}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-(-4)}{-2} \quad\text{или}\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{-2}$$

- уравнение искомой прямой.

4) Обозначим точку пересечения полученной прямой с плоскостью MNP буквой R. Уравнение прямой QR запишем в параметрическом виде:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{-2}=\lambda\Rightarrow\begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=-2\lambda+3 \\ z=-2\lambda-4 \end{cases}$$

Подставим эти уравнения в уравнение плоскости MNP:

$$(\lambda+1)-2(-2\lambda+3)-2\cdot(2\lambda-4)-7=0\Rightarrow 9\lambda=-4,\ \lambda=-4/9.$$

Итак, $x=-4/9+1=5/9$; $y=8/9+3=35/9$; $z=8/9-4=-28/9$, т.е. получили координаты точки R(5/9;35/9; – 28/9).

5)Найдем теперь расстояние от точки *Q* до плоскости *MNP* двумя способами.

Во-первых, это расстояние равно длине вектора $\overline{QR}$:

$$\left|\overline{QR}\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{9}+1\right)^2 + \left(\frac{35}{9}-3\right)^2 + \left(-\frac{28}{9}+4\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{14}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{324}{81}} = \frac{81}{9} = 2.$$

Во-вторых, воспользуемся формулой расстояния H от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$H = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

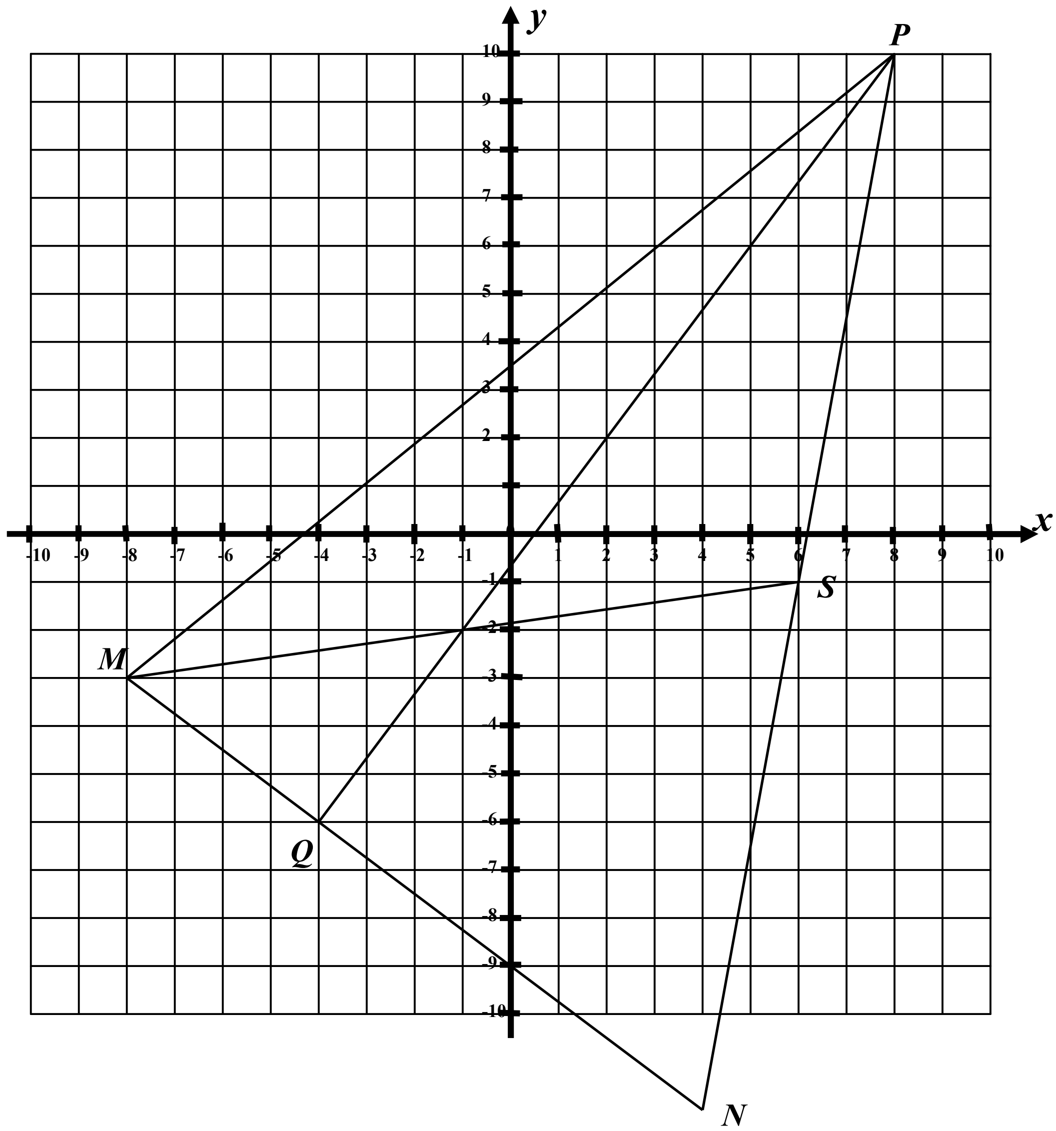
Получим:

$$H = \left|\overline{QR}\right| = \frac{\left|(-1) - 2(-3) - 2(-4) - 7\right|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\left|1 - 6 + 8 - 7\right|}{3} = \frac{\left|-6\right|}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Видим, что оба способа дают одинаковый результат.

Пример 5 (к задачам 41-50). Даны вершины треугольника *MNP*: *M*(–8, –3), *N*(4, –12), *P*(8,10). Требуется найти: 1) длину стороны *MN*; 2) уравнение сторон *MN* и *NP* и угловые коэффициенты; 3) угол *N*; 4) уравнение высоты *PQ* и её длину; 5) уравнение медианы *MS*.

Решение. Сначала сделаем чертеж.



1) Длину стороны MN находим как длину вектора

$\overline{MN}$=(4 – (– 8); – 12 – (– 3))=(12;9): $\left|\overline{MN}\right| = \sqrt{12^2 + (-9)^2} = 15.$

2) Уравнения сторон MN и NP находим как уравнения прямых, проходящих через две точки: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

$$MN\text{: } \frac{x-(-8)}{4-(-8)} = \frac{y-(-3)}{-12-(-3)} \Rightarrow \frac{x+8}{12} = \frac{y+3}{-9} \Rightarrow \frac{x+8}{4} = \frac{y+3}{-3}.$$

$$NP\text{: } \frac{x-4}{8-4} = \frac{y-(-12)}{10-(-12)} \Rightarrow \frac{x-4}{4} = \frac{y+12}{22} \Rightarrow \frac{x-4}{2} = \frac{y+12}{11}.$$

Уравнение MN запишем в виде $y + 3 = -3/4(x+8)$, откуда находим её угловой коэффициент: $K_{MN} = -3/4$. Аналогично для прямой NP:

$$y + 12 = \frac{11}{2}(x-4) \Rightarrow K_{NP} = \frac{11}{2}.$$

3) угол N треугольника находим с помощью скалярного произведения векторов

$\overline{NM} = (-12{,}9)$ и $\overline{NP} = (2{,}11)$:

$$\cos N = \frac{\overline{NM} \cdot \overline{NP}}{\left|\overline{NM}\right| \cdot \left|\overline{NP}\right|} = \frac{(-12) \cdot 2 + 9 \cdot 11}{\sqrt{(-12)^2 + 9^2} \cdot \sqrt{2^2 + 11^2}} = \frac{-24 + 99}{15 \cdot 5\sqrt{5}} = \frac{75}{75 \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

итак, $\angle N = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 63^0 = 1{,}1$ рад.

Можно угол N находить с помощью угловых коэффициентов прямых NM и NP, т.е. по формуле

$$\operatorname{tg} N = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{11}{2}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{11}{2}} = \frac{-\frac{25}{4}}{1 - \frac{33}{8}} = 2, \quad \text{т.е} \quad \angle N = \operatorname{arctg} 2 \approx 63^0 = 1{,}1 \text{ рад.}$$

4) уравнение высоты PQ напишем по формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$, воспользовавшись условием перпендикулярности прямых PQ и MN: $K_{PQ} \cdot K_{MN} = -1$,

$$K_{PQ} = \frac{4}{3} \Rightarrow PQ : y - 10 = \frac{4}{3}(x - 8) \Rightarrow 4x - 3y - 2 = 0.$$

Для нахождения длины вектора PQ воспользуемся формулой расстояния от точки P до прямой MN:

$$PQ = \frac{\left|3x_p + 4y_p + 36\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\left|3 \cdot 8 + 4 \cdot 10 + 36\right|}{5} = \frac{100}{5} = 20.$$

Разумеется, к этому же результату можно придти по другому: можно найти координаты точки Q – пересечения MN и PQ, решив совместно их уравнения:

$$\begin{cases} 3x + 4y = -36 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$$

Применим формулы Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 16 = -25, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -36 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 108 - 8 = 100,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -36 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 144 = 150 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -4, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -6.$$

Итак, $Q(-4; -6)$, тогда $\overline{PQ} = (-12; -16)$,

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{400} = 20.$$

5) Точка S – середина отрезка PN, её координаты находим по формуле:

$$x_s = \frac{x_P + x_N}{2}; \quad y_s = \frac{y_P + y_N}{2} \Rightarrow x_s = 6,\ y_s = -1, \Rightarrow S(6,-1).$$

Теперь через две точки напишем уравнение MS:

$$\frac{x - 6}{-8 - 6} = \frac{y + 1}{-3 + 1} \Rightarrow \frac{x - 6}{-14} = \frac{y + 1}{-2} \Rightarrow \frac{x - 6}{7} = \frac{y + 1}{1}.$$

<u>Пример 6 (к задачам 51-60).</u> Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+x^2-4x-20}$.

<u>Решение.</u> Подставив x=2 получим неопределенность типа 0/0. Это означает, что многочлены x^2-3x+2 и 3x^3+x^2-4x-20 обращаются в нуль при x=2, т.е. x=2 является корнем обоих многочленов и оба многочлена делятся без остатка на (x-2). Проще всего деление осуществлять уголком:

$$
\begin{array}{l|l}
x^2-3x+2 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^2-2x} & x-1 \\
\quad -x+2 & \\
\quad -\underline{-x+2} & \\
\qquad 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
3x^3+x^2-4x-20 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\underline{3x^3-6x^2} & 3x^2+7x+10 \\
\quad 7x^2-4x & \\
\quad -\underline{7x^2-14x} & \\
\qquad 10x-20 & \\
\qquad -\underline{10x-20} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Результатами делений являются равенства:

$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$; $\quad 3x^3+x^2-4x-20=(x-2)(3x^2+7x+10)$.

Теперь, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^3+x^2-4x-20}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(3x^2+7x+10)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{3x^2+7x+10}=\frac{2-1}{3\cdot 4+7\cdot 2+10}=\frac{1}{36}.$$

<u>Пример 7 (к задачам 51-60).</u> Вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$.

<u>Решение.</u> Вновь имеем определитель типа 0/0, но в данном случае усложнение обусловлено наличием радикала: аргумент x «спрятан» под радикалом. Поскольку $x\to 5$, то $x-5\to 0$ и простейшим источником неопределенности является (x - 5). Этот множитель уже имеется в знаменателе, а в числителе его нужно получить. Для этого применяются искусственные приемы. В данном случае домножим числитель и знаменатель на выражение ($\sqrt{5x}+x$), сопряженное числителю с тем, чтобы для избавления от иррациональности в числителе использовать формулу разности квадратов: (a - b)(a + b) = a^2 - b^2. Получим:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{5x}-x}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{5x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{5x}+x\right)}{(x-5)\cdot\left(\sqrt{5x}+x\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{5x-x^2}{(x-5)\left(\sqrt{5x}+x\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{x(5-x)}{(x-5)\left(\sqrt{5x}+x\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{-x(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{5x}+x\right)} = -\lim_{x\to 5}\frac{x}{\left(\sqrt{5x}+x\right)} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь случаи, когда $x\to\infty$.

Пример 8 (к задачам 51-60). Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-x+3}{3x^2+2x+7}$.

Решение. Имеем неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ и поскольку сам аргумент $x\to\infty$, то основным источником неопределенности является аргумент x в наивысшей степени, в нашем случае x^2. Его и надо выделить в числителе и знаменателе. Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-x+3}{3x^2+2x+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^2-x+3}{x^2}}{\dfrac{3x^2+2x+7}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{7-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}} = \frac{7-0+0}{3+0+0} = \frac{7}{3}.$$

Мы учли, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$ т.д.

Пример 9 (к задачам 51-60). Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

Решение. При подстановке предельного значения аргумента $x = 0$ получаем неопределенность типа 0/0 и поскольку участвуют тригонометрические функции, следует применять 1-й замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. На практике чаще всего первый замечательный предел применяется в более общей формулировке: пусть $x\to x_0$ и при этом функция $\alpha(x)\to 0$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$. Теперь переходим к вычислению указанного предела. Воспользуемся формулой $1-\cos 3x = 2\sin^2\dfrac{3x}{2}$.

Тогда $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{3x}{2}\cdot\sin\dfrac{3x}{2}}{x^2} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{3x}{2}\cdot\sin\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{3x}{2}\cdot\dfrac{3x}{2}\cdot\dfrac{4}{9}} = \frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{3x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{3x}{2}} = \frac{9}{2}.$$

Пример 10 (к задачам 51-60). Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\sin\frac{x-2}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$.

Решение. Подстановка предельного значения аргумента дает неопределенность типа $(0\cdot\infty)$. Кроме того, аргумент стремится к двум ($x\to 2$), а не к нулю. В таких случаях удобно провести замену переменной y=2-x и если $x\to 2$, то $y\to 0$. Оформим это следующим образом:

$$\lim_{x\to 2}\sin\frac{x-2}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=(0\cdot\infty)=\left|\begin{array}{l} y=2-x\Rightarrow x=2-y\\ y\to 0 \text{ при } x\to 2\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{y\to 0}\sin\left(\frac{-y}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi(2-y)}{4}=\lim_{y\to 0}\sin\left(\frac{-y}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{4}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin\left(\frac{-y}{2}\right)=-\sin\frac{y}{2}\\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{4}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{4}\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\sin\frac{y}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{4}=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\sin\frac{y}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\pi y}{4}}{\sin\frac{\pi y}{4}}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{4}}\cdot\cos\frac{\pi y}{4}=$$

$$=-\lim_{y\to 0}\left[\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\cdot\frac{\frac{\pi y}{4}}{\sin\frac{\pi y}{4}}\right]\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi y}{4}=-\frac{2}{\pi}\cdot\cos 0=-\frac{2}{\pi}.$$

Заметим, что мы искусственно в скобках «подогнали» под формулу первого замечательного предела, в связи с чем нам пришлось домножить на $\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Пример 11 (к задачам 51-60). Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{x}$.

Решение. Вспомним правило (см. пример 13), что при $x\to 0$ предел отношения двух многочленов одинаковой степени равен отношению их старших коэффициентов, и получим в данном примере неопределенность типа 1^{∞}. Поскольку фигурирует показательная функция, то раскрывать эту неопределенность следует с помощью второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$, где $e\approx 2{,}7$. Второй замечательный предел применяется в более общей формулировке: пусть $x \to x_0$ (в частности $x \to \infty$) и при этом функция $\alpha(x) \to 0$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$.

Теперь обратимся к заданному пределу. Общая формула второго замечательного предела означает, что под знаком предела стоит сумма единицы и некоторой бесконечно малой функции $\alpha(x)$ $\left(\alpha(x) \to 0\right)$, а в показателе степени находится $\frac{1}{\alpha(x)}$. Вот и «подгоним» заданный предел под форму второго замечательного предела (добавив и отняв единицу):

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^x = \left(1^\infty\right) = \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x+3}-1\right)^x =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{2x+1-2x-3}{2x+3}\right)^x = \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^x.$$

Продолжаем «подгонять» под общую формулу второго замечательного предела. Получили в нашем случае $\alpha(x) = \frac{-2}{2x+3}$, следовательно $\frac{1}{\alpha(x)} = \frac{2x+3}{-2}$.

Поэтому $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{-2}{2x+3}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}\cdot x \cdot \frac{-2}{2x+3}} =$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2x}{2x+3}} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{-2x}{2x+3}} = e^{-1}.$$

Мы воспользовались тем, что

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}} = e \quad \text{и} \quad \lim_{x \to \infty}\frac{-2x}{2x+3} = -1.$$

<u>Пример 12 (к задачам 61-70).</u> Найти производную функции $y = \arccos^3(5-\ln x)$.

<u>Решение.</u> $y = \arccos^3(5-\ln x)$ является сложной функцией. Здесь y можно расматривать, как функцию, зависящую от некоторой переменной u: $y = f(u) = u^3$, где u также является некоторой функцией $u = g(t) = \arccos t$, а $t = \varphi(x) = 5-\ln x$. По правилу дифференцирования сложной функции можем записать:

$$y'_x = f'_u \cdot g'_t \cdot t'_x. \qquad (1)$$

По таблице производных находим:

$$f'_u = \left(u^3\right)' = 3u^2; \quad g'_t = (\arccos t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}; \quad t'_x = \left(5 - \ln x\right)' = (0 - \frac{1}{x}).$$

Подставляем найденный производные в формулу (1) и делаем обратную замену:

$$y'_x = (\arccos^3(5-\ln x))'_x = 3\arccos^2(5-\ln x)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}\cdot(0-\frac{1}{x}) =$$

$$= -\frac{3\arccos^2(5-\ln x)}{\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}\cdot(0-\frac{1}{x}) = \frac{3\arccos^2(5-\ln x)}{x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}.$$

Итак, мы нашли y' или $\frac{dy}{dx}$. Найдём вторую производную заданной функции, то есть продифференцируем полученную функцию $y'_x = \frac{3\arccos^2(5-\ln x)}{x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}$. Для того, чтобы найти производную этой функции воспользуемся правилами дифференцирования частного: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Распишем по этой формуле $\left(y'_x\right)'$:

$$\left(y'_x\right)' = \left(\frac{3\arccos^2(5-\ln x)}{x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}\right)' =$$

$$= \frac{\left(3\arccos^2(5-\ln x)\right)'\cdot\left(x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}\right) - \left(3\arccos^2(5-\ln x)\right)\cdot\left(x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}\right)'}{\left(x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}\right)^2}.$$

Производную $\left(3\arccos^2(5-\ln x)\right)'$ находим по вышеизложенному принципу:

$$\left(3\arccos^2(5-\ln x)\right)' = 6\arccos(5-\ln x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{6\arccos(5-\ln x)}{x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}.$$

Производную $\left(x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}\right)'$ будем находить по правилу дифференцирования произведения: $(u\cdot v)' = u'v + v'u$.

$$\left(x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}\right)' = x'\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}+x\cdot\left(\sqrt{1-(5-\ln x)^2}\right)' =$$

$$=\sqrt{1-(5-\ln x)^2}+x\cdot\frac{(5-\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}=\sqrt{1-(5-\ln x)^2}+\frac{(5-\ln x)}{\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}=\frac{9\ln x-19-\ln^2 x}{\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}.$$

Подставляем найденные производные в $\left(y'_x\right)'$. Опуская преобразования, окончательно записываем:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\left(y'_x\right)'=\left(\frac{3\arccos^2(5-\ln x)}{x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}\right)' =$$

$$=\frac{\frac{6\arccos(5-\ln x)}{x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}\cdot\left(x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}\right)-\left(3\arccos^2(5-\ln x)\right)\cdot\frac{9\ln x-19-\ln^2 x}{\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}}{\left(x\cdot\sqrt{1-(5-\ln x)^2}\right)^2}=$$

$$=-\frac{3}{x^2}\left(\frac{\arccos^2(5-\ln x)\cdot(5-\ln x)}{\sqrt{\left(1-(5-\ln x)^2\right)^3}}+\frac{2\arccos(5-\ln x)}{1-(5-\ln x)^2}+\frac{\arccos^2(5-\ln x)}{\sqrt{1-(5-\ln x)^2}}\right).$$

<u>Пример 13 (к задачам 71-80).</u> Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ и построить ее график.

<u>Решение.</u> Исследование предлагается провести в несколько этапов, которые озаглавим соответствующим образом.

1.<u>Исследование на непрерывность, построение асимптот.</u>

Начинаем с области определения функции: функция определена (следовательно, непрерывна) везде, кроме точки $x = 0$. Исследуем характер разрыва в точке $x = 0$.

$$\lim_{x\to-0}\frac{x^2+1}{x}=\frac{0+1}{-0}=\frac{1}{-0}=-\infty, \qquad \lim_{x\to+0}\frac{x^2+1}{x}=\frac{0+1}{+0}=+\infty$$

Таким образом, в точке $x = 0$ функция терпит разрыв II рода с бесконечным скачком, а прямая $x = 0$ (т.е. ось OY) является вертикальной асимптотой графика функции.

Найдем наклонные (в частном случае горизонтальные) асимптоты. Известно, что уравнение наклонных асимптот имеет вид $y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}$, а после нахождения углового коэффициента k находим $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-kx)$. В нашем случае получаем:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1,\quad k=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Следовательно, $y=x$ - наклонная асимптота.

2.<u>Иссследование с помощью первой производной (возрастание, убывание, экстремум).</u>

Находим производную функции по формуле производной дроби:

$$y'=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'=\frac{(x^2+1)'\cdot x-(x^2+1)\cdot x'}{x^2}=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}.$$

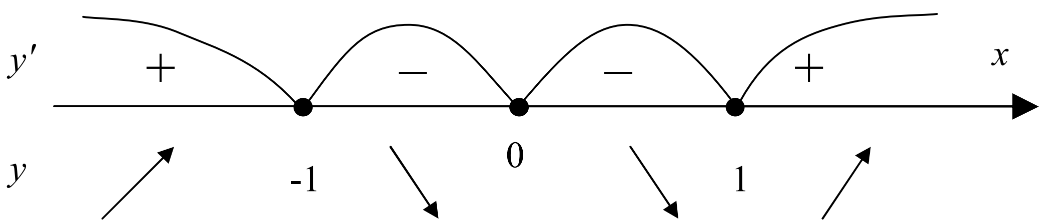
Итак, $y'=\dfrac{x^2-1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$

Находим критические точки, т.е. точки, «подозрительные» на экстремум. Имеются два источника появления критических точек: точки, в которых производная равна нулю, или не существует.

$y'=0\Rightarrow(x-1)(x+1)=0\Rightarrow x_1=1, x_2=-1;$

y' не существует $\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x_3=0$

Итак, получили три критические точки, которыми числовая прямая разбивается на интервалы, в каждом из которых производная имеет определенный знак. Удобно изобразить исследование с помощью первой производной на числовой прямой следующим образом:



Берем в каждом интервале любую точку и выясняем знак производной (ставим соответственно + или -).

На интервалах $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$ производная $y'>0$, следовательно функция y возрастает (стрелки направлены вверх); соответственно, на интервалах (-1,0) и (0,1) $y'<0$, следовательно функция убывает.

Этот схематический рисунок удобен тем, что стрелки как бы намечают траекторию графика функции (см. график в конце примера). Кроме этого, он наглядно иллюстрирует достаточный признак экстремума функции в точке: если при переходе через критическую точку производная меняет знак, то в этой точке экстремум есть, причем, если знак меняется с «+» на «–», то имеется максимум, если с «–» на «+», то минимум. Глядя на рисунок, это легко понять: при $x = -1$ функция имеет максимум, при $x = 1$ – минимум.

Найдем $f(-1) = \dfrac{1+1}{-1} = -2$; $f(+1) = \dfrac{1+1}{1} = 2$. Итак, точки $A_1(-1, -2)$ и $A_2(1,2)$ – точки максимума и минимума графика функции.

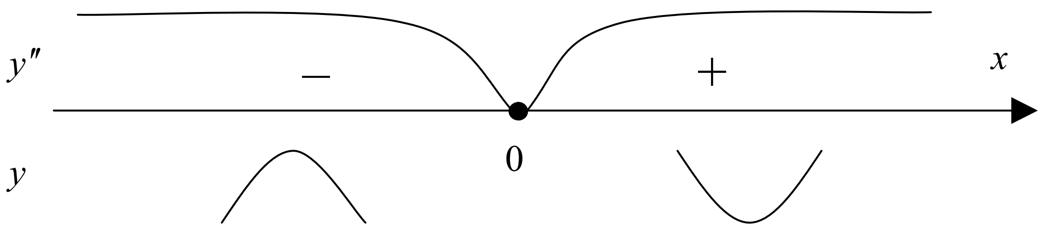
<u>Замечание:</u> Разумеется, точка $x = 0$ никак не может быть точкой экстремума, поскольку в этой точке функция терпит разрыв. Однако, для нахождения интервалов возрастания и убывания она необходима и потому её тоже считаем критической. То же замечание относится и к исследованию с помощью y''.

<u>3. Исследование функции с помощью второй производной (выпуклость, вогнутость, перегиб).</u>

Исследование функции на выпуклость, вогнутость и перегиб с помощью второй производной проводится по той же схеме, по которой с помощью первой производной проводится исследование функции на убывание, возрастание и экстремум.

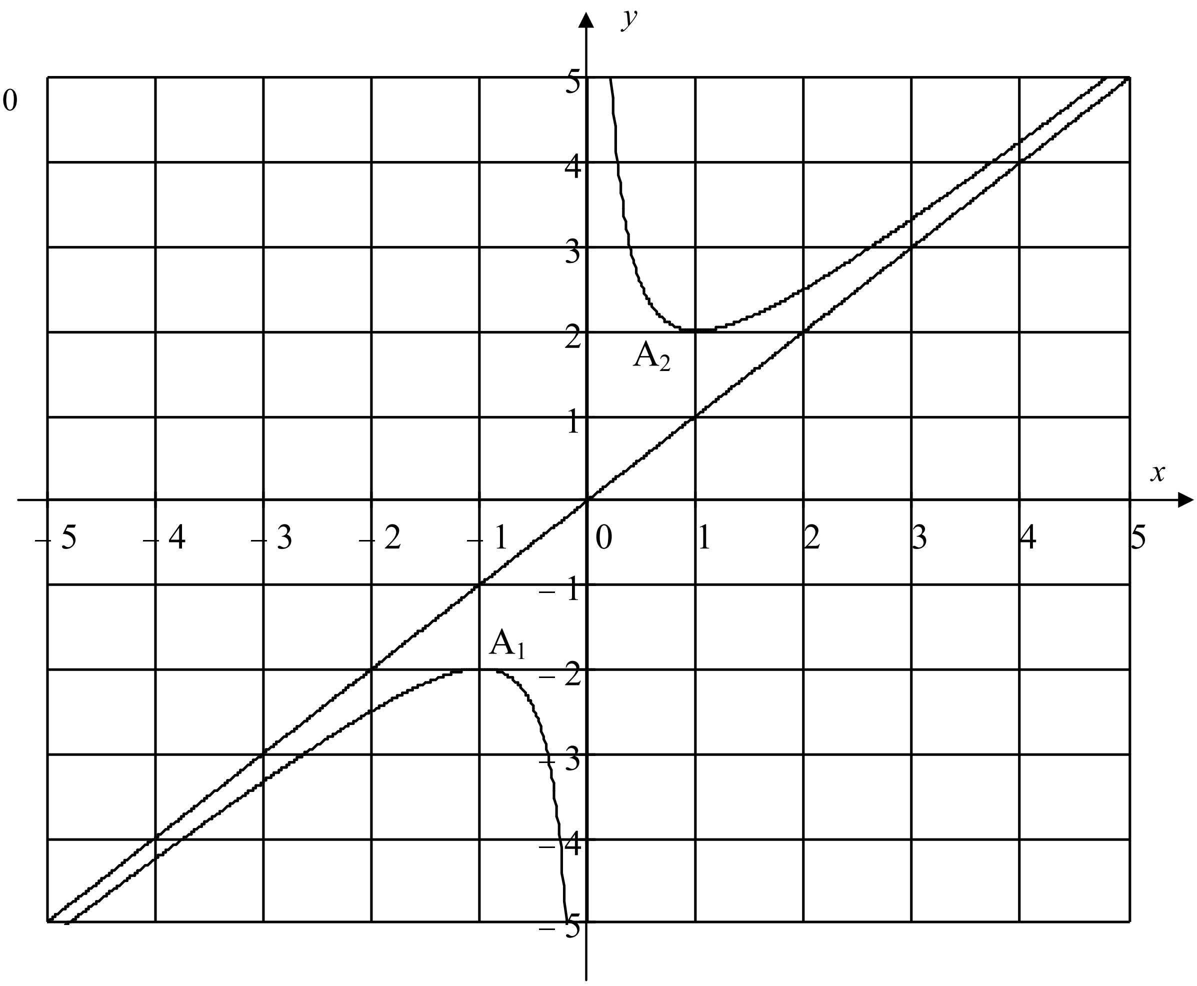
$$y'' = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)' = (1-x^{-2})' = 0-(-2)\cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3},\ y'' = \frac{2}{x^3}.$$

Имеются два источника точек, «подозрительных» на перегиб: $y'' = 0$ *или* y'' не существует. В нашем примере $y'' \neq 0$; y'' не существует при $x = 0$. Вновь строим аналогичный чертеж:



На интервале $(-\infty,0)$ $y'' < 0$, следовательно функция y - выпуклая; на интервале $(0,\infty)$ $y'' > 0$, следовательно функция вогнутая. Несмотря на то, что в точке $x = 0$ выпуклость сменяется вогнутостью, эта точка не является точкой перегиба, поскольку в точке x=0 функция разрывна.

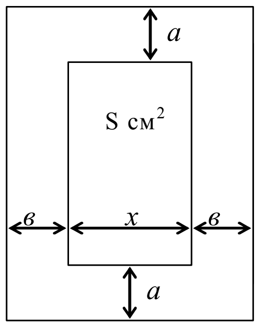
Теперь строим график функции на основании проведенного исследования.



Пример №14. (для задач 81-90).

На странице книги печатный текст должен занимать S см^2. Верхнее и нижнее поля должны быть a см, а правое и левое – b см. Какими должны быть наиболее экономные размеры страницы?

Решение. Сделаем схематичный чертеж страницы и размеры текста на ней (внутренний прямоугольник).



Обозначим ширину текста за x. Тогда, поскольку площадь текста равна S, высота текста равна $y = S/x$. Из чертежа ясно, что ширина m страницы будет равна $m = x + 2b$, высота h страницы равна $h = S/x + 2a$, а площадь страницы

$F(x) = mh = (x + 2b)(S / x + 2a) = S + 2ax + 2bS / x + 4ab$.

Итак, получили задачу на экстремум (минимум) функции

$$F(x) = S + 2ax + 2bS / x + 4ab.$$

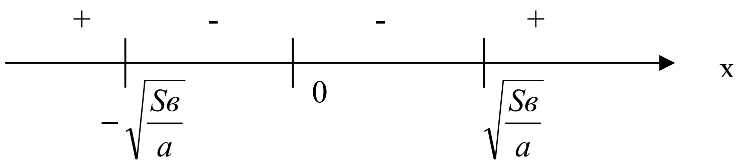
Сначала находим критические точки (точки, «подозрительные» на экстремум). Таковыми могут быть лишь те, в которых производная $F'(x)$ равна нулю или не существует. Находим $F'(x)$:

$$F'(x) = 2a - \frac{2bS}{x^2}.$$

Если $F'(x) = 0$, то $2a = \frac{2bS}{x^2}$; $x^2 = \frac{bS}{a}$; $x_1 = -\sqrt{\frac{Sb}{a}}, x_2 = \sqrt{\frac{Sb}{a}}$.

$F'(x)$ не существует, если x=0. Таким образом, получаем три критические точки. Эти точки отмечаем на числовой прямой и определяем знак производной $F'(x)$ на каждом из получившихся интервалов, представив $F'(x)$ в виде:

$$F'(x)=2\left(\frac{ax^2-bS}{x^2}\right)=2a\left(\frac{x^2-\frac{bS}{a}}{x^2}\right)=2a\frac{\left(x-\sqrt{\frac{Sb}{a}}\right)\cdot\left(x+\sqrt{\frac{Sb}{a}}\right)}{x^2}.$$



Из физических соображений ясно, что величина x, ширина текста, должна быть положительным числом. Поэтому из трех критических точек нас интересует лишь точка $x=\sqrt{\frac{Sb}{a}}$. Производная $F''(x)$ при переходе через эту точку слева направо меняет знак с минуса на плюс, т.е. в этой точке убывание сменяется возрастанием функции, следовательно, функция F(x) в этой точке имеет минимум.

Итак, страница будет экономной (т.е. ее площадь будет наименьшей), если ширина текста $x=\sqrt{\frac{Sb}{a}}$, а его высота $y=\sqrt{\frac{Sa}{b}}$.

Соответственно этому, ширина самой страницы

$$m=x+2b=\sqrt{\frac{Sb}{a}}+2b=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{S}+2\sqrt{ab}\right),$$

а ее высота $h=y+2a=\sqrt{\frac{Sa}{b}}+2a=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\left(\sqrt{S}+2\sqrt{ab}\right).$

Эти формулы не очень наглядны. Для наглядности найдем отношение высоты к ширине страницы:

$$\frac{h}{m}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{S}+2\sqrt{ab})\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}(\sqrt{S}+2\sqrt{ab})}=\frac{a}{b}.$$

Итак, получаем ответ в более наглядной форме: размеры самой экономной страницы должны быть такими, чтобы отношение ее высоты к ширине равнялось отношению верхнего или нижнего поля к правому или левому.

Пример 15 (к задачам 91-100). Найти неопределенные интегралы:

$$а)\int\frac{dx}{x(1-\ln^2 x)};\quad б)\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx;\quad в)\int\frac{\sqrt{2x+3}}{1+\sqrt[3]{2x+3}}dx;\quad г)\int\sqrt{9+x^2}\,dx.$$

Решение. Существуют два общих метода интегрирования: метод замены переменной (иначе он называется методом подстановки) и метод интегрирования по частям.

Метод замены переменной схематично можно записать в виде следующей формулы:

$$\int f(x)dx = \left| x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt \right| = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt. \qquad (2)$$

Метод интегрирования по частям определяется формулой:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du, \qquad (3)$$

где $u = u(x), \quad v = v(x)$ - некоторые функции.

Когда и как применять каждую из формул рассмотрим на примерах.

а) Обратим внимание на формулу (2). Во-первых, отметим, что эту формулу можно применять как слева направо, так и справа налево. Если иметь в виду применение формулы (2) справа налево, т.е. в виде (используя в первоначальном задании привычную переменную х):

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \left| g(x) = t \Rightarrow g'(x)dx = dt \right| = \int f(t)dt, \qquad (4)$$

То можно заметить, что формулу (4) следует применять всякий раз, когда в заданном интеграле мы увидим некоторую функцию $g(x)$ и её производную $g'(x)$, - тогда применяем подстановку $g(x) = t$.

Обратимся к первому интегралу а) и заметим, что под знаком интеграла присутствует функция $g(x) = \ln x$ и её производная $g'(x) = \frac{1}{x}$. Поэтому:

$$\int \frac{dx}{x(1-\ln^2 x)} = \left| \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\right| + c.$$

б) Второй интеграл вычисляется по формуле интегрирования по частям. Почему? Дело в том, что, как уже было сказано, замена переменной уместна, если под знаком интеграла мы заметили некоторую функцию и её производную В нашем примере б) под знаком интеграла присутствуют две функции разной природы: $\ln x$ и $\sqrt{x}$. Нет ни одной табличной формулы, связывающей функции разной природы. Поэтому естественно возникает необходимость разъединить эти функции. Такую роль и исполняет формула интегрирования по частям:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow v = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \end{matrix} \right| = \ln x \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{dx}{x} = 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x} + c.$$

Просматривая приведенную запись решения увидим, во-первых, что формула (3) сводит вычисление исходного интеграла к вычислению двух, но более простых интегралов: один – при нахождении функции v, а второй – в результате применения самой формулы. Во-вторых, формула действительно разъединила две функции $\ln x$ и $\sqrt{x}$.

Следующие два примера реализуют применение формулы замены переменной слева направо.

в) В третьем интеграле обратим внимание на присутствие иррациональностей, т.е. радикалов, причем под знаком радикалов различной степени стоит линейная функция ($2x + 3$). Такие иррациональности, когда под знаком радикалов различной степени стоят дробно-линейные (в частном случае – линейные) функции, называются простейшими иррациональностями.

Такие иррациональности потому и называются простейшими, что очевидная подстановка приводит к цели, а именно, полагаем $2x + 3 = t^6$ с тем, чтобы одновременно избавиться от обоих радикалов. Проведем теперь все преобразования:

$$\int \frac{\sqrt{2x+3}}{1+\sqrt[3]{2x+3}}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2x+3=t^6 \Rightarrow d(2x+3)=d(t^6), \\ \text{т.е.}\quad 2dx = 6t^5\,dt \Rightarrow dx = 3t^5\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\sqrt{t^6}}{1+\sqrt[3]{t^6}} \cdot 3t^5\,dt = 3\int \frac{t^3 \cdot t^5\,dt}{1+t^2} = 3\int \frac{t^8\,dt}{t^2+1}.$$

Таким образом, пока сделан один шаг вперед – интеграл от иррациональной функции сведен к интегралу от дробно-рациональной функции (ДРФ), т.е. к отношению двух многочленов – к более простой задаче.

Займемся теперь полученным интегралом. Под знаком интеграла стоит ДРФ, причем неправильная, т.к. степень числителя больше степени знаменателя. Как известно, всякая неправильная ДРФ может быть представлена в виде суммы некоторого многочлена и правильной ДРФ (у которой степень числителя строго меньше степени знаменателя). Это представление осуществляется делением уголком

$$
\begin{array}{l|l}
-\; t^8 & t^2+1 \\ \cline{2-2}
\;\;\underline{t^8+t^6} & t^6-t^4+t^2-1 \\
\qquad -\;-t^6 & \\
\qquad\;\; \underline{-t^6-t^4} & \\
\qquad\qquad -\;-t^4 & \\
\qquad\qquad\;\; \underline{-t^4+t^2} & \\
\qquad\qquad\qquad -\;-t^2 & \\
\qquad\qquad\qquad\;\; \underline{-t^2-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 1 &
\end{array}
\qquad \Rightarrow \frac{t^8}{t^2+1} = t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}
$$

Итак,

$$\int \frac{t^8 dt}{t^2+1} = \int \left(t^6 - t^4 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \int t^6 dt - \int t^4 dt + \int t^2 dt - \int dt + \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + c = \left| \text{возвращаемся к старой переменной}: t = \sqrt[6]{2x+3} \right| =$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt[6]{(2x+3)^7} - \frac{1}{5}\sqrt[6]{(2x+3)^5} + \frac{1}{3}\sqrt[6]{(2x+3)^3} - \sqrt[6]{2x+3} + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{2x+3} + c.$$

г) Следующий пример показывает ещё один прием избавления от иррациональности, на сей раз от квадратической. При этом следует помнить, что для интегрирования квадратических иррациональностей имеются так называемые подстановки Эйлера. Они имеются в любых учебниках. Вместе с тем, иногда удобны тригонометрические подстановки. Обратим внимание на заданный интеграл. В принципе, задача любой подстановки заключается в избавлении от иррациональности. Для этого используются известные формулы тригонометрии:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x.$$

Вернемся к нашему примеру. На основании приведенных формул будут ясна логика нижеприведенных преобразований:

$$\int \sqrt{9+x^2}\,dx = \left| x = 3\operatorname{tg} t \Rightarrow dx = 3\frac{dt}{\cos^2 t} \right| = \int \sqrt{9 + 9\operatorname{tg}^2 t} \cdot \frac{3dt}{\cos^2 t} = \int 3\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} \cdot \frac{3dt}{\cos^2 t} =$$

$$= 9\int \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = 9\int \frac{\cos t dt}{\cos^4 t} = 9\int \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)^2} = \left| \sin t = y \Rightarrow \cos t dt = dy \right| =$$

$$= 9\int \frac{dy}{(1-y^2)^2} = 9\int \frac{dy}{(1-y)^2(1+y)^2} = 9\int \frac{dy}{(y-1)^2(y+1)^2}.$$

Вычислим теперь интеграл $I = \int \dfrac{dt}{(y-1)^2(y+1)^2}$.

В соответствии с теорией – это интеграл от правильной ДРФ, знаменатель которой представлен в каноническом виде и которую представляем в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{A}{(y-1)^2} + \frac{B}{(y-1)} + \frac{C}{(y+1)^2} + \frac{Д}{y+1}.$$

Для нахождения коэффициентов $A, B, C, Д$ приводим дроби к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{A(y+1)^2 + B(y-1)(y+1)^2 + C(y-1)^2 + Д(y+1)(y-1)^2}{(y-1)^2(y+1)^2}$$

Дроби равны, знаменатели равны, следовательно, равны и числители:

$$1 = A(y+1)^2 + B(y-1)(y+1)^2 + C(y-1)^2 + Д(y+1)(y-1)^2 \qquad (5)$$

Равенство (5) , которое на самом деле – тождество, является исходным для определения коэффициентов *A,B,C,Д*. В связи с этим, имеется два способа определения коэффициентов *A,B,C,Д*.

<u>1 способ:</u> Раскрываем скобки в тождество (4):

$$1 = A(y^2 + 2y + 1) + B(y^3 + y^2 - y - 1) + C(y^2 - 2y + 1) + Д(y^3 - y^2 - y + 1) \Rightarrow$$

$$1 = (B + Д)y^3 + (A + B + C - Д)y^2 + (2A - B - 2C - Д)y + (A - B + C + Д).$$

Многочлены равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях аргумента, поэтому $\begin{cases} B + Д = 0 \\ A + B + C - Д = 0 \\ 2A - B - 2C - Д = 0 \\ A - B + C + Д = 1, \end{cases}$

Т.е. получаем СЛАУ относительно неизвестных *A, B, C, Д*. Эту систему решаем методом Гаусса:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) (-2)(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) (3)(2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) (1/4) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

R(*A*) = R(*A**) = 4 $\Rightarrow$ система имеет единственное решение. Для нахождения его составим систему, соответствующую ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} A + B + C - Д = 0 \\ \quad B + Д = 0 \\ -C + Д = 0 \\ \qquad 4Д = 1 \Rightarrow Д = 1/4 \Rightarrow C = 1/4, \end{cases}$$

$B = –Д = –1/4 \quad \Rightarrow \quad A = –B – C + Д = 1/4 – 1/4 + 1/4 = 1/4 \quad \Rightarrow$
$A = 1/4, \; B = –1/4, \; C = 1/4, \; Д = 1/4.$

2 способ. Возвращаемся к тождеству (5) и поскольку оно тождество, то справедливо при всех значениях неизвестного *x*. Нам необходимо вычислить значения четырех неизвестных, поэтому возьмем четыре значения *x*. Разумеется, желательно эти значения выбирать с выгодой. «Выгодными» значениями являются $y = -1$, $y = +1$. Остальные два значения возьмем любыми: $y = 0$ и $y = 2$. Получаем:

$$\begin{cases} y = -1 \Rightarrow 1 = C(-1-1)^2 \Rightarrow 1 = 4C, C = 1/4, \\ y = +1 \Rightarrow 1 = A\cdot(1+1)^2 \Rightarrow 1 = 4A, A = 1/4, \\ y = 0 \Rightarrow 1 = A\cdot 1 + в(-1)(1) + C + Д \\ y = 2 \Rightarrow 1 = A\cdot 9 + B\cdot 9 + C + Д\cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 1/4 - B + 1/4 + Д \\ 1 = 9/4 + 9B + 1/4 + 3Д \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B - Д = -1/2 \\ 9B + 3Д = -3/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 9 = 12, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ 9 & -3/2 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow B = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4},$$

$$Д = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{+12} = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}, Д = -\frac{1}{4}.$$

Итак,

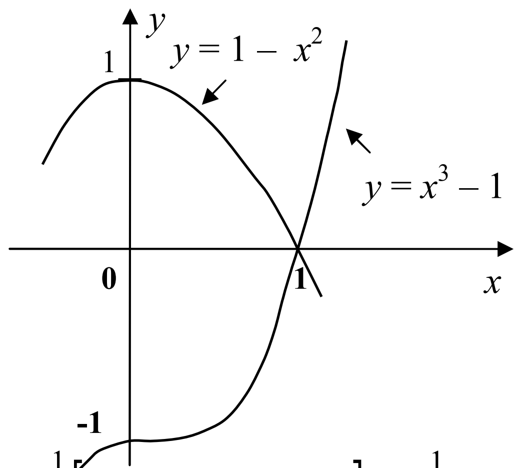
$$\int \frac{dy}{(Y-1)^2(y+1)^2} = \frac{1}{4}\int\frac{dy}{(y-1)^2} - \frac{1}{4}\int\frac{dy}{y-1} + \frac{1}{4}\int\frac{dy}{(y+1)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dy}{y+1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y-1} - \frac{1}{4}\ln|y-1| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y+1} + \frac{1}{4}\ln|y+1| + C.$$

Процесс интегрирования закончен - надо вернуться к старой переменной – это оставляем читателю, - хотя бы для того, чтобы посмотреть, каким громоздким может быть окончательный результат.

<u>Пример 16(к задачам 101-110).</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^3 - 1$, $y = 1 - x^2$, $x = 0$.

<u>Решение.</u>



Фигура (см. чертеж) ограничена:
сверху – графиком функции $y = 1 - x^2$,
снизу – графиком функции $y = x^3 - 1$,
слева – прямой $x = 0$, справа прямой
$x = 1$ (которая выродилась в точку).
поэтому, на основании геометрического смысла определенного интеграла площадь фигуры

$$S = \int_0^1 \left[(1 - x^2) - (x^3 - 1)\right]dx = \int_0^1 (1 - x^2 - x^3 + 1)dx = \int_0^1 (2 - x^2 - x^3)dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{17}{12} \text{ ед}^2.$$

<u>Пример 17 (к задачам 111-120).</u> Вычислить число $A = \dfrac{5,03}{(4,98)^3 - (5,03)^2}$ приближенно с помощью дифференциала функции двух переменных.

<u>Решение.</u> Сначала отметим, что замена приращения функции её дифференциалом представляет собой самый «грубый» метод приближенных вычислений. Вместе с тем велико его теоретическое значение и практическая простота – почти все вычисления проводятся без привлечения вычислительных средств.

Сущность метода заключается в следующем: пусть требуется вычислить число А – значение функции $f(x, y)$ в некоторой точке $(x_1, y_1): A = f(x_1, y_1)$. Точка (x_1, y_1) - «плохая», т.е. устно, без вычислительных средств (например, калькулятора) подсчитать $f(x_1, y_1)$ трудно. Тогда находят близкую, «хорошую» точку (x_0, y_0) вычисления в которой выполняются легко.

Далее применяют формулу приближенных вычислений с помощью дифференциала:

$$A = f(x_1, y_1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y, \tag{14}$$

где $\Delta x = x_1 - x_0$, $\Delta y = y_1 - y_0$ - приращения аргументов, $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ - значения частных производных функции в «хорошей» точке (x_0,y_0).

Обратимся теперь к нашему примеру. Видим, что в выражение для числа A входят два «плохих» числа $x_1 = 5{,}03$ и $y_1 = 4{,}98$ и, таким образом, можно записать, что число A является значением функции $f(x,y)=\dfrac{x}{y^3-x^2}$ в точке (x_1,y_1), где $x_1 = 5{,}03$ и $y_1 = 4{,}98$. Тогда выбираем близкие два числа $x_0=5$; $y_0=5$, т.е. «хорошую» точку (5;5) и проводим вычисления по формуле (14) в этой точке. Предварительно получаем:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 5{,}03-5 = 0{,}03;\ \Delta y = y_1 - y_0 = 4{,}98-5 = -0{,}02,\ f(x_0,y_0)=\frac{5}{5^3-5^2}=0{,}05.$$

Находим частные производные:

$$f'_x(x,y)=\frac{1\cdot(y^3-x^2)-x\cdot(-2x)}{(y^3-x^2)^2}=\frac{x^2+y^3}{(y^3-x^2)^2},$$

$$f'_y(x,y)=-\frac{x\cdot 3y^2}{(y^3-x^2)^2}=-\frac{3xy^2}{(y^3-x^2)^2},$$

И вычисляем значения этих частных производных в точке (5,5):

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_x(5{,}5)=\frac{5^2+5^3}{(5^3-5^2)^2}=\frac{150}{100^2}=0{,}015,$$

$$f'_y(x_0,y_0)=f'_y(5{,}5)=-\frac{3\cdot 5\cdot 5^2}{(5^3-5^2)^2}=-\frac{375}{100^2}=-0{,}0375.$$

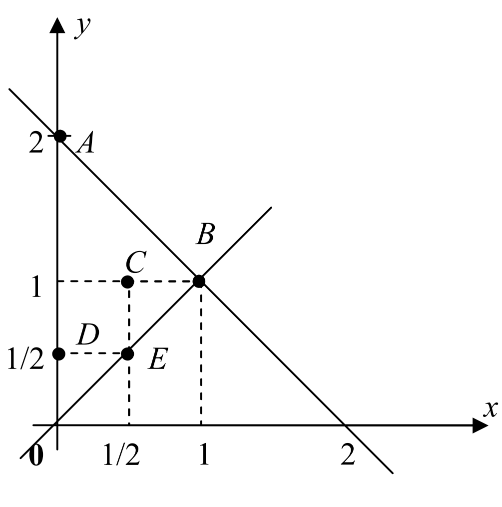
Подставляя полученные значения в формулу (14) получаем окончательный результат:

$$A=\frac{5{,}03}{(4{,}98)^3-(5{,}03)^2}\approx 0{,}05+0{,}015\cdot 0{,}03+(-0{,}375)\cdot(-0{,}02)=$$

$$=0{,}05+0{,}00045+0{,}00075=0{,}0512.$$

<u>**Пример 18 (к задачам 121-130)**</u>. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-y^2+2xy-3x+y+5$ в замкнутой области G, ограниченной линиями $x = 0$, $y = x$, $x + y = 2$.

<u>Решение.</u> Сделаем чертеж.



Область G представляет собой треугольник OAB. Следует обратить внимание на замкнутость области G (т.е. граница принадлежит области), поскольку в замкнутой области функция обязательно достигает своих наименьшего и наибольшего значений, при этом они достигаются либо в точках экстремума, либо на границе области. Поэтому сначала найдем стационарные точки – точки «подозрительные» на экстремум.

Для этого находим частные производные и приравниваем их к нулю – получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 2y - 3 = 0 \\ z'_y = -2y + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 2x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = 1.$$

Тогда $C(1/2,1)$ – критическая и принадлежит области G. Можно, конечно, использовать достаточный признак экстремума и выяснить имеется ли в действительности в точке C максимум или минимум. Мы, однако, предпочтем более простой путь – вычислим значение функции в точке C, а затем сравним с исследованием на границе:

$$z(C) = (0{,}5)^2 - 1 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1 - 3 \cdot 0{,}5 + 1 + 5 = 6{,}25.$$

Приступаем к исследованию функции на экстремум на границе области Д. Граница состоит из трех отрезков линий. Рассмотрим их по порядку.

1) OA: $x = 0,\ 0 \le y \le 2$.

На этой границе функция $z = -y^2 + y + 5$. Исследуем её на экстремум: $z' = 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1/2$. Получили точку $D(0;1/2)$. Она принадлежит отрезку OA. Вычисляем $z(D) = -(0{,}5)^2 + 0{,}5 + 5 = 5{,}25$. На отрезке OA функция $z = -y^2 + y = 5$ может достигать наибольшего и наименьшего значений либо в точках экстремума, либо на границе, т.е.в точках $O(0,0)$ или $A(0,2)$. Вычисляем z(O) = 5; z(A) = – 4 + 2 + 5 = 3.

2) AB: $y = 2 - x, 0 \le x \le 1$.

Подставляем снова из уравнения границы $y = 2 - x$ в заданную функцию и получим $z = x^2 - (2 - x)^2 + 2x(2 - x) - 3x + 2 - x + 5 \Rightarrow z = -2x^3 + 4x + 3$.

$z' = -4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$, т.е. получили $B(1,1)$.

Эта точка является граничной точкой отрезка AB. Вычисляем $z(B) = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 = 5$.

3) OB: $y = x,\ 0 \le x \le 1$.

Поступая аналогично, получаем:

$$z = x^2 - x^2 + 2x^2 - 3x + x + 5 \Rightarrow z = 2x^2 - 2x + 5,$$

$$z' = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/2.$$

Получили критическую точку $E(1/2,1/2)$, вычисляем $z(E) = 2 \cdot (0{,}5)^2 - 2 \cdot 0{,}5 + 5 = 4{,}5$.

Значения функции в граничных точках O и B мы вычисляли ранее.

Итак, окончательно имеем: z(C) = 6,25; z(D) = 5,25; z(A) = 3; z(B) = 5; z(E) = 4,5.

Сравнивая эти значения заключаем, что наименьшее значение z(A) = 3 достигается в граничной точке A; наибольшее значение z(C) = 6,5 достигается в точке экстремума (максимума) – точке C.

Пример 19 (к задачам 131-140). Найти вектор нормали к поверхности S в точке $M(3;0;-2)$. $S:\quad x^2-6x+9y+z^2=4z+4$.

Решение. Уравнение нормали к поверхности S в точке $M(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z},$$

где $\overline{N}=\left(F'_x;F'_y;F'_z\right)$ – направляющий вектор прямой нормали, то есть искомый вектор нормали; $F(x;y;z)=0$ – уравнение поверхности S.

Перепишем уравнение поверхности S в виде $x^2-6x+9y+z^2-4z-4=0$ и найдём частные производные функции $F(x;y;z)$ в точке M:

$$\frac{\partial F(M)}{\partial x}=2x-6\Big|_{M(3,0,-2)}=2\cdot 3-6=0,\qquad \frac{\partial F(M)}{\partial y}=9,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2z-4\Big|_{M(3,0,-2)}=2\cdot(-2)-4=-8.$$

Тогда вектор нормали к поверхности S в точке M будет равен $\overline{N}=(0;9;-8)$.

Пример 20 (к задачам 131-140).

Найти производную скалярной функции $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ в точке $M(1,-3,4)$ в направлении вектора $\overline{a}=(-2,-1,1)$. Найти величину и направление наибольшего изменения скалярной функции в указанной точке

Решение. Производная скалярной функции $u(x.y.z)$ в направлении вектора $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$ вычисляется по формуле:

$$\frac{du}{da}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\overline{a}$, т.е. координаты единичного вектора $\overline{a}^\circ=\dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$. В нашем примере частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\,\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\,\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}.$$

Найдем теперь направляющие косинусы вектора $\overline{a}=(-2,-1,1)$. Поскольку

$$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6},$$

То $\bar{a}^\circ = \left(\frac{a_x}{|\bar{a}|}, \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \frac{a_z}{|\bar{a}|}\right) = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$. Следовательно, производная поля $u\ (x,y,z)$ по направлению вектора $\bar{a}$ в произвольной точке имеет вид

$$\frac{du}{da} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{-2}{x+\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{-1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right) =$$

$$= \frac{-2\sqrt{y^2+z^2} - y + z}{\sqrt{6}\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)\sqrt{y^2+z^2}},$$

а в точке M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial a}\right|_{M(1,-3,4)} = \frac{-2\cdot 5+3+4}{\sqrt{6}\cdot 6\cdot 5} = \frac{-3}{6\sqrt{6}\cdot 5} = -\frac{1}{10\sqrt{6}} \approx \text{-0,04}.$$

Найдём теперь величину и направление наибольшего изменения скалярной функции. Направление наибольшего изменения скалярной функции определяется, как градиент скалярной функции. А величина этого направления – как модуль градиента.

Градиент скалярной фыункции вычислим по формуле

$$\overline{\operatorname{grad} u} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\bar{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Для нашего примера он равен

$$\overline{\operatorname{grad} u} = \frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\bar{i} + \frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\bar{j} + \frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\bar{k} =$$

$$= \left(\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}; \frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}; \frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$$

- в произвольной точке,

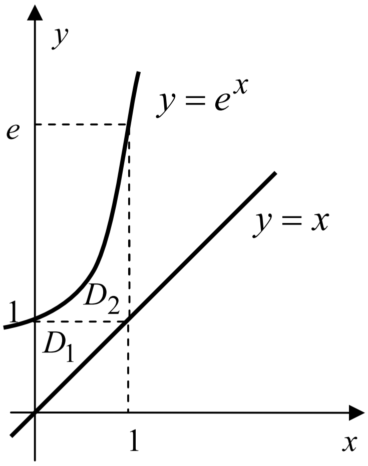
$$\overline{\operatorname{grad} u(M)} = \frac{1}{6}\cdot\bar{i} + \frac{1}{6}\cdot\frac{-3}{5}\cdot\bar{j} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\bar{k} = \frac{1}{6}\cdot\bar{i} - \frac{1}{10}\cdot\bar{j} + \frac{2}{15}\cdot\bar{k} = \left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{10}; \frac{2}{15}\right)$$

- в точке $M(1, -3, 4)$.

Тогда модуль градиента: $\left|\overline{\operatorname{grad} u(M)}\right| = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{100} + \frac{4}{225}} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}236$.

Пример 21. (к задачам 141-150).

В указанном двойном интеграле построить область интегрирования, изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл в обоих случаях:



$$I=\int_0^1 dy\int_0^y dx+\int_1^e dy\int_{\ln y}^1 dx.$$

Решение: Сначала построим область интегрирования D, которая разбита на две части D_1 и D_2. Область D_1 ограничена линиями (см. первое слагаемое): $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$ и $x = y$. Область D_2 ограничена линиями (см. второе слагаемое) $y = 1$, $y = e$, x=ln y (т.е. $y = e^x$) и $x = 1$. Таким образом область D, построена и заданный повторный интеграл равен двойному $I=\iint_D dxdy$, который представляет собой площадь области D.

Поменяем порядок интегрирования, т.е. область D проектируем на ось Ox – она проектируется в отрезок [0,1] оси Ox. Тем самым получены нижний и верхний пределы интегрирования по переменной x. Теперь заметим, что в рамках полосы между прямыми $x = 0$ и $x = 1$ область D ограничена снизу прямой $x = y$ или ($y = x$), а сверху кривой $x = \ln y$ (или $y = e^x$) Таким образом, получаем

$$I=\iint_D dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{e^x} dy\ =\int_0^1 dy\int_0^y dx+\int_1^e dy\int_{\ln y}^1 dx.$$

Теперь вычислим интеграл в обоих случаях.

$$I=\int_0^1 dx\int_x^{e^x} dy=\int_0^1\left(y\Big|_x^{e^x}\right)dx=\int_0^1(e^x-x)dx=\left(e^x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=e-\frac{1}{2}-e^0=e-\frac{3}{2}.$$

Второй случай оказывается для вычисления более громоздким:

$$I=\int_0^1 dy\int_0^y dx+\int_1^e dy\int_{\ln y}^1 dx=\int_0^1\left(x\ \Big|_0^y\right)dy+\int_1^e\left(x\ \Big|_{\ln y}^1\right)dy=\int_0^1 ydy+\int_1^e(1-\ln y)dy=$$

$$=\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1+y\ \Big|_1^e-\int_1^e\ln ydy=\frac{1}{2}+e-1-\int_1^e\ln ydy=\left|\begin{matrix}\text{по}\quad\text{частям}:\\ u=\ln y\Rightarrow du=\dfrac{dy}{y}\\ dv=dy\Rightarrow v=y\end{matrix}\right|=$$

$$=e-\frac{1}{2}-\left(y\cdot\ln y\ \Big|_1^e-\int_1^e y\cdot\frac{dy}{y}\right)=e-\frac{1}{2}-e\cdot\ln e+1\cdot\ln 1+\int_1^e dy=e-\frac{1}{2}-e+y\ \Big|_1^e=$$

$$=-\frac{1}{2}+e-1=e-\frac{3}{2}.$$

<u>Пример 22 (к задачам 151-160).</u> Вычислить двойной интеграл, переходя к полярным координатам: $\iint\limits_D dxdy$, D: $\left(x^2+y^2\right)^2 = x^3$.

<u>Решение</u>: Связь между декартовыми (x,y) и полярными (φ,ρ) координатами имеет вид: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $0\le\varphi<2\pi$ (или $-\pi\le\varphi<\pi$). При этом изменяется подынтегральное выражение и область интегрирования по формуле: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \iint\limits_\Gamma f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot|J|d\varphi dp$, где якобиан J вычисляется следующим образом:

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial p} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho\sin^2\varphi-\rho\cos^2\varphi=-\rho.$$

Следовательно, $|J|=\rho$. В нашем примере $f(x,y)=1$, поэтому $\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_\Gamma \rho d\varphi d\rho$.

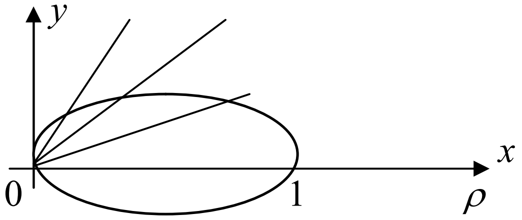
Остается выяснить, как выглядит область Г с тем, чтобы знать как расставить пределы интегрирования. Можно поступать двояко.

Для данного примера область D ограничена линией $\left(x^2+y^2\right)^2=x^3$. Как видим, в декартовых координатах это громоздкое выражение. Для построения этой линии перейдем к полярным координатам (подставим в уравнение линии):

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)^2=\rho^3\cos^3\varphi \Rightarrow \rho^4=\rho^3\cos^3\varphi \Rightarrow \rho=\cos^3\varphi$$

- так выглядит уравнение границы области D в полярных координатах. Обычно строят границу по точкам, помня геометрический смысл полярных координат: ρ - длина радиус-вектора точки, φ - угол, который образует этот радиус-вектор с положительным направлением оси ОХ. Поскольку всегда $\rho\ge 0$, то в нашем примере угол φ принимает значение в промежутке $[-\pi/2,\pi/2]$. При этом в силу четности косинуса составим табличку для построения кривой лишь для отрезка $[0,\pi/2]$, а для отрезка $[-\pi/2,0]$ используем симметрию(см. рисунок).

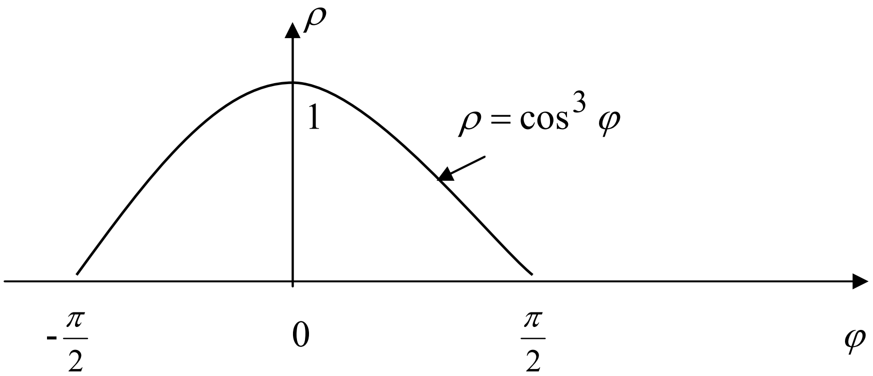
φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
ρ	1	$\left(\sqrt{3/2}\right)^3=\dfrac{3\sqrt3}{8}\approx 0{,}65$	$\dfrac{1}{2\sqrt2}\approx 0{,}35$	$\dfrac18\approx 0{,}125$	0



Таким образом, граница области D получилась в форме овала. Теперь из чертежа легко видеть, что угол φ изменяется (по часовой стрелке) от ($-\pi/2$) до ($\pi/2$). Далее возьмем в области произвольный радиус-вектор и заметим, что минимальное значение длины радиуса-вектора равно нулю (начало координат), а максимальное находится как расстояние от начала координат до границы области D, т.е. $\rho = \cos^3\varphi$.

Итак, $I = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_\Gamma \rho d\varphi d\rho = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\cos^3\varphi} \rho d\rho$.

Второй способ состоит в том, что область Г строим в декартовой системе координат (φ, ρ): (см. рисунок) и вновь приходим к тому же результату. Вычислим интеграл:



$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\cos^3\varphi} \rho d\rho = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\cos^3\varphi} \rho d\rho = 2\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{\cos^3\varphi} \right) d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^6\varphi d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right)^3 d\varphi = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \left(1 + 3\cos 2\varphi + 3\cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \frac{3}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi + \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 2\varphi \cdot \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\pi}{2} + \frac{3}{16}\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \frac{3}{16}\int\limits_0^{\pi/2} \cos 4\varphi d\varphi + \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 2\varphi)\cdot\cos 2\varphi d\varphi =$$

$$== \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{32} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \cos 2\varphi - \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\cdot\cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{5\pi}{32} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\cdot\cos 2\varphi d\varphi = \frac{5\pi}{32} - \frac{1}{16}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d(\sin 2\varphi) =$$

$$= \frac{5\pi}{32} - \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2\varphi}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{5\pi}{32}.$$

<u>Пример 23 (к задачам 161-170).</u> Выполнить действия над комплексными числами. Результаты записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Изобразить графически:

а) $\dfrac{2-3j}{1+j}$; б) $\left(\dfrac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)^{60}$; в) $\sqrt[4]{-1}$

<u>Решение.</u> Число j, удовлетворяющее условию $j^2=-1$, называется мнимой единицей. Заметим, что мнимую единицу чаще обозначают буквой i. Однако в электротехнике буквой i всегда обозначают ток, а для обозначения мнимой единицы используется j.

Число $z=a+bj$, где a и b - действительные числа, представляет собой алгебраическую форму записи комплексного числа.

$z=|z|\cdot(\cos\varphi+j\sin\varphi)$ - это тригонометрическая форма записи комплексного числа. Здесь $|z|$ - модуль комплексного числа: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$; угол φ - аргумент комплексного числа, который находится из формул $\cos\varphi=\dfrac{a}{|z|}, \quad \sin\varphi=\dfrac{b}{|z|}, \quad 0\le\varphi<2\pi$.

$z=|z|\cdot e^{j\varphi}$ - показательная форма записи комплексного числа.

а) Найти частное двух комплексных чисел, записанных в алгебраической форме: $\dfrac{2-3j}{1+j}$. Результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Изобразить графически

<u>Решение</u>. Для того чтобы найти частное двух комплексных чисел в алгебраической форме, домножим числитель и знаменатель заданной дроби на число, комплексно сопряжённое знаменателю. Комплексно сопряженным числу $z=a+bj$ называют число $\bar{z}=a-bj$. Тогда

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3j}{1+j}=\frac{(2-3j)(1-j)}{(1+j)(1-j)}=\frac{2-3j-2j+3j^2}{1+1}=\frac{2-5j-3}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}j.$$

Мы получили результат деления в алгебраической форме: $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}j$.

Представим число z в тригонометрической форме. Для этого вычислим, сначала, его модуль и аргумент:

$$z=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}j \;\Rightarrow\; |z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2};$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-1/2}{\sqrt{26}/2} = -\frac{1}{\sqrt{26}};\ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-5/2}{\sqrt{26}/2} = -\frac{5}{\sqrt{26}} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 259^{o} \approx 4{,}5 \text{ рад.}$$

Тогда тригонометрическая форма записи полученного комплексного числа будет иметь вид:

$$z = \frac{\sqrt{26}}{2}\cdot\left(\cos 259^{o} + j\sin 259^{o}\right) = \frac{\sqrt{26}}{2}\cdot\left(\cos 4{,}5 + j\sin 4{,}5\right).$$

Показательная:

$$z = \frac{\sqrt{26}}{2}\cdot e^{4{,}5j}.$$

Геометрически комплексное число $z = a + bj$ на плоскости изображается радиус-вектором $\overline{OZ} = (a, b)$. В нашем случае получаем изображение числа z, показанное на рис 1.

б) Вычислить $\left(\frac{1 - j\sqrt{3}}{2}\right)^{60}$. Результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Изобразить графически

<u>Решение</u>. Сначала запишем число $z = \frac{1 - j\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$ в тригонометрической форме. Для этого найдём модуль и аргумент комплексного числа.

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно $\varphi = 300^0$ или $\frac{5\pi}{3}$ радиан. Тогда тригонометрическая форма записи комплексного числа будет $z = 1\left(\cos\frac{5\pi}{3} + j\sin\frac{5\pi}{3}\right)$. Для возведения полученного комплексного числа в степень $n = 60$ воспользуемся формулой Муавра:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi).$$

Тогда

$$z^{60} = 1^{60}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3}\cdot 60 + j\sin\frac{5\pi}{3}\cdot 60\right) = \cos 100\pi + j\sin$$

$$= \cos(50\cdot 2\pi) + j\sin(50\cdot 2\pi) = \cos 0 + j\sin 0$$

- это тригонометрическая форма записи заданного комплексного числа.

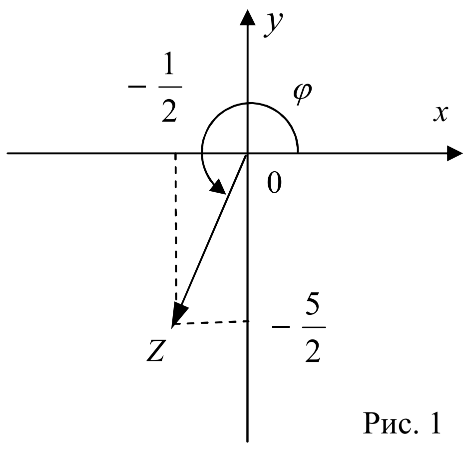


Рис. 1

Сразу можем записать показательную форму:

$$z^{60} = e^{100\pi j} = e^{0j}.$$

Для того чтобы получить алгебраическую форму записи, нужно вычислить значения синуса и косинуса в тригонометерической форме:

$$z^{60} = \cos 0 + j\sin 0 = 1.$$

$z^{60} = 1$ - алгебраическая форма записи комплексного числа.

Само комплексное число $z^{60} = 1$ изображено на рис. 2.

в) Найти все значения $\sqrt[4]{-1}$. Результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Изобразить графически

<u>Решение</u>. Комплексный корень $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных значений. Для того чтобы найти все эти значения, воспользуемся формулой

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,.....,n-1.$$

Представим, сначале, $z = -1$ в тригонометрической форме:

$z = -1 = \cos\pi + j\sin\pi$, тогда $\left(\sqrt[4]{-1}\right)_k = \sqrt[4]{|-1|}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + j\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$, k=0,1,2,3.

Отсюда получаем 4 значения корня четвертой степени из (-1):

$$\left(\sqrt[4]{-1}\right)_0 = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2};$$

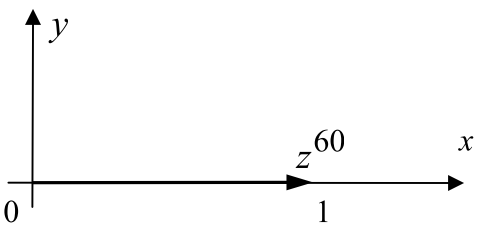


Рис. 2

$$\left(\sqrt[4]{-1}\right)_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4} = e^{j\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\left(\sqrt[4]{-1}\right)_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4} = e^{j\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\left(\sqrt[4]{-1}\right)_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + j\sin\frac{7\pi}{4} = e^{j\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Здесь у нас сразу записана тригонометрическая, показательная и алгебраическая формы.

Графически все полученные значения корня расположены в вершинах пра-

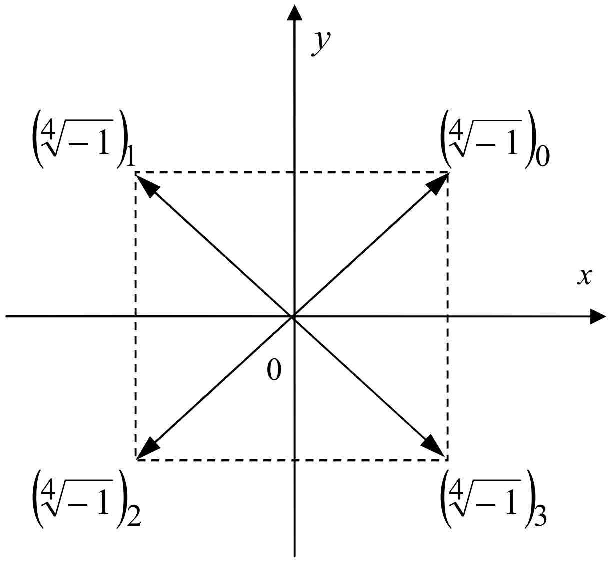


Рис. 3

вильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ (рис. 3).

<u>Пример 24 (к задачам 171-180)</u> Найти общее решение дифференциального уравнения (ДУ): $y = xy' - (2 + y')$. Для заданного уравнения найти интегральную кривую, проходящую через точку (2, 2).

<u>Решение</u>: Нахождение интегральной кривой для ДУ, проходящей через заданную точку, сводится к решению задачи Коши. Решить задачу Коши означает найти такое частное решение ДУ, которое удовлетворяет заданным начальным условиям.

Для ДУ первого порядка начальные условия имеют вид $y(x_o)= y_o$, т.е. требуется найти такое частное решение ДУ $y(x)$, которое удовлетворяет условию: $y= y_o$, при $x=x_o$. Это означает, что требуется найти такую функцию y(x), график которой (он называется интегральной кривой) проходит через точку с координатами (x_o, y_o).

Обратимся теперь к заданному ДУ. При решении ДУ в первую очередь следует определить к какому типу ДУ относится заданное ДУ и в соответствии с этим избрать метод решения. Несколько преобразуем наше ДУ:

$$y = xy' - (2 + y') \Rightarrow y = xy' - 2 - y' \Rightarrow y'(x-1) - y - 2 = 0 \Rightarrow y'(x-1) - y = 2 \Rightarrow$$

$$y' - \frac{1}{x-1} \cdot y = \frac{2}{x-1}.$$

Теперь ясно, что это линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ) 1-го порядка. Действительно, общий вид ЛДУ 1-го порядка следующий: $y' + p(x)y = q(x)$, так что в нашем примере

$$p(x) = -\frac{1}{x-1}, \qquad q(x) = \frac{2}{x-1}$$

Для нахождения общего решения ЛДУ 1-го порядка обычно применяют один из двух методов: метод вариации произвольного постоянного (иначе его называют методом Лагранжа) и метод двух функций (иначе его называют методом Бернулли). Мы решим заданное ДУ обеими способами и читатель увидит, что в практическом плане оба метода не сильно отличаются, однако, «идеология» у них разная.

1) Метод двух функций (Метод Бернулли).

Идея метода не нова – свести решение задачи к двум задачам, но более простым. Такой прием уже применялся, например, при интегрировании по частям.

Итак, решение ДУ будем искать в виде произведения двух функций:

$$y = u \cdot v \quad \Rightarrow y' = u'v + v'u.$$

Подставляем эти выражения в заданное ДУ:

$$u'v + v'u - \frac{1}{x-1} \cdot uv = \frac{2}{x-1} \text{ или } u'v + u \cdot \left(v' - \frac{1}{x-1} \cdot v\right) = \frac{2}{x-1} \qquad (6)$$

Приравняем скобку нулю:

$$v' - \frac{1}{x-1} \cdot v = 0.$$

Легко заметить, что мы получили линейное однородное ДУ (ЛОДУ), соответствующее заданному неоднородному ДУ (ЛНДУ). Всякое ЛОДУ 1-го порядка является ДУ с разделяющими переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим какое-нибудь частное решение:

$$v' - \frac{v}{x-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x-1} \quad \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|v| = \ln|x-1| \quad \Rightarrow \quad v = x - 1.$$

Теперь подставим полученное выражение для функции v в ДУ (6):

$$u'(x-1) = \frac{2}{x-1} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{2}{(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2}{(x-1)^2} dx \Rightarrow$$

$$\int du = \int \frac{2}{(x-1)^2} dx \Rightarrow u = -\frac{2}{x-1} + C.$$

Итак, окончательно,

$$y = uv = \left(C - \frac{2}{x-1}. \right) \cdot (x-1) = C(x-1) - 2$$ – общее решение заданного ЛНДУ.

<u>2) Метод вариации производной постоянной (Метод Лагранжа).</u>
Лагранж предложил общее решение ЛНДУ искать в виде общего решения соответствующего ЛОДУ, только вместо произвольного постоянного С взять функцию $C(x)$, которую и следует найти.

Сначала решаем ЛОДУ, соответствующее заданному ЛНДУ:

$$y' - \frac{1}{x-1} \cdot y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1} \Rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \int \frac{y}{x-1} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x-1| + \ln C \Rightarrow \bar{y} = C(x-1).$$

Итак, $\bar{y} = C(x-1)$ – общее решение ЛОДУ.

В соответствии с предложением Лагранжа общее решение ЛНДУ ищем в виде $y = C(x) \cdot (x-1)$, где функцию c(x) требуется найти. Для этого подставляем $y = C(x) \cdot (x-1)$ в исходное ЛНДУ:

$$\left(C(x) \cdot (x-1) \right)' - \frac{1}{x-1} \cdot C(x) \cdot (x-1) = \frac{2}{x-1},$$

$$C'(x) \cdot (x-1) + C(x) \cdot (x-1)' - C(x) = \frac{2}{x-1} \quad \text{или} \quad C'(x) \cdot (x-1) = \frac{2}{x-1},$$

отсюда получаем: $C'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ и $C(x) = -\dfrac{2}{x-1} + C$,

следовательно,

$$y = C(x) \cdot (x-1) = \left(-\frac{2}{x-1} + C \right) \cdot (x-1) = C(x-1) - 2$$ – общее решение ЛНДУ.

Как видим, оба метода дали одинаковые результаты. Приступаем теперь к нахождению частного решения, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(2) = 2$. Для этого надо в общее решение подставить $x = 2$ и $y = 2$ и затем найти $2 = C(2-1) - 2 \;\Rightarrow\; C = 4$.

Итак, $y = 4(x-1) - 2$, т.е. $y = 4x - 6$ – решение задачи Коши. Графически это решение задаёт кривую, проходящую через точку (2, 2).

<u>**Пример 25 (к задачам 171-180).**</u> Найти общее решение ДУ $y'' + 4y = \sin x$.

Решение: Известно, что y – общее решение ЛНДУ представляется в виде суммы $\bar{y}$ – общего решения ЛОДУ и $\tilde{y}$ - какого-нибудь частного решения ЛНДУ. Частное решение $\tilde{y}$ можно находить двумя способами:

<u>1-й метод (метод вариации произвольных постоянных)</u>. Сначала решаем соответствующее ЛОДУ: $y'' + 4y = 0$. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2j, \;\; \lambda_2 = -2j.$$

Следовательно, $\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ – общее решение ЛОДУ.

Частное решение ЛНДУ записываем в виде: $\tilde{y} = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$. Для нахождения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подставим $\tilde{y}$ в исходное ДУ. Предварительно найдем

$$\tilde{y}' = C_1'(x)\cos 2x - 2C_1(x)\sin 2x + C_2'(x)\sin 2x + 2C_2(x)\cos 2x =$$
$$= (C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x) - 2C_1(x)\sin 2x + 2C_2(x)\cos 2x$$

Полагаем скобку равной нулю

$$C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \qquad (7)$$

и в этом предположении находим

$$\tilde{y}'' = -2C_1'(x)\sin 2x - 4C_1(x)\cos 2x + 2C_2'(x)\cos 2x - 4C_2(x)\sin 2x.$$

Подставляем теперь полученные выражения в исходное ДУ:

$$-2C_1'(x)\sin 2x - 4C_1(x)\cos 2x + 2C_2'(x)\cos 2x - 4C_2(x)\sin 2x +$$
$$+ 4C_1(x)\cos 2x + 4C_2(x)\sin 2x = \sin x.$$

Слагаемые, содержащие $C_1(x)$ и $C_2(x)$ уничтожаются. Тогда последнее уравнение вместе с уравнением (7) образуют систему уравнений для нахождения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0; \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \sin x. \end{cases}$$

Определитель этой системы (он называется определителем Вронского или вронскианом) отличен от нуля:

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2.$$

Находим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \sin x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\sin x \cdot \sin 2x; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \cos 2x.$$

Следовательно, по формулам Крамера имеем:

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-\sin x \cdot \sin 2x}{2} \quad \text{и} \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\sin x \cdot \cos 2x}{2}.$$

Остается найти интегралы:

$$C_1(x) = \int \frac{-\sin x \cdot \sin 2x}{2} dx = -\frac{1}{2}\int \sin x \cdot \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\int \sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x dx =$$
$$= -\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = -\int \sin^2 x d\sin x = -\frac{\sin^3 x}{3}.$$

Произвольную постоянную в неопределенном интеграле взяли равной нулю, т.к. требуется какое-нибудь одно частное решение.

$$C_2(x)=\int\frac{\sin x\cdot\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int\sin x\cdot\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int\sin x\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin x\cdot(\cos^2 x-(1-\cos^2 x))dx=\frac{1}{2}\int\sin x\cdot(2\cos^2 x-1)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(2\cos^2 x-1)d\cos x=-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos x}{2}.$$

Итак,

$$\tilde{y}=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x=-\frac{\sin^3 x}{3}\cdot\cos 2x+\left(-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos x}{2}\right)\cdot\sin 2x=$$

$$=\sin x\cdot\left(\left(\frac{\cos x}{2}-\frac{\cos^3 x}{3}\right)\cdot 2\cos x-\frac{\sin^2 x}{3}\cdot\cos 2x\right)=$$

$$=\sin x\cdot\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos^2 x}{3}\right)\cdot 2\cos^2 x-\frac{\sin^2 x}{3}\cdot\left(1-2\sin^2 x\right)\right)=$$

$$=\sin x\cdot\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\left(1-\sin^2 x\right)}{3}\right)\cdot 2\left(1-\sin^2 x\right)-\frac{\sin^2 x}{3}\cdot\left(1-2\sin^2 x\right)\right)=$$

$$=\sin x\cdot\left(1-\sin^2 x-\frac{2}{3}+\frac{4\sin^2 x}{3}-\frac{2\sin^4 x}{3}-\frac{\sin^2 x}{3}+\frac{2\sin^4 x}{3}\right)=\frac{\sin x}{3}.$$

2-ой метод (метод неопределенных коэффициентов). Иначе этот метод называется подбором $\tilde{y}$ по виду правой части. Заметим, что первый метод является универсальным, какова бы ни была правая часть ЛНДУ. Второй метод имеет ограниченное применение: если только правая часть ЛНДУ $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x), \tag{8}$$

где $P_m(x)$ и $P_n(x))$ – многочлены степени m и n соответственно. В этом случае $\tilde{y}$ ищем в виде:

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x+R_s(x)\sin\beta x)\cdot x^r, \tag{9}$$

где – S = max(m,n), $Q_s(x)$, $R_s(x)$ – многочлены степени S с неопределенными коэффициентами (которые и требуется найти), r – кратность числа $\alpha+\beta j$ в качестве корня характеристического уравнения.

Этот, на первый взгляд громоздкий алгоритм, на практике таковым не является. Действительно, обратимся к заданному уравнению $y''+4y=\sin x$. Корни характеристического уравнения мы нашли ранее: $\lambda_1=2j$, $\lambda_2=-2j$. Правая часть $f(x)=\sin x$ является частным случаем формулы (8) при $\alpha=0$, $\beta=1$, следовательно, $\alpha+\beta j=j$ и это число не является корнем характеристического уравнения. Это означает, что кратность $r=0$. Коэффициент при синусе равен 1, т.е. является многочленом нулевой степени, поэтому и в формуле (9) коэффициенты при косинусе и синусе будут многочленами нулевой степени (т.е. некоторыми числами A и B). Итак, в нашем случае $\tilde{y} = A\cos x + B\sin x$.

Остается найти A и B. Для этого подставим $\tilde{y}$ в ЛНДУ, найдя предварительно $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$:

$$\tilde{y}' = -A\sin x + B\cos x; \qquad \tilde{y}'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Следовательно,

$$-A\cos x - B\sin x + 4(A\cos x + B\sin x) = \sin x.$$

Приводим подобные члены:

$$3A\cos x + 3B\sin x = \sin x.$$

Приравниваем соответствующие коэффициенты при синусе и косинусе:

$$\begin{cases} 3A = 0, \\ 3B = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \Rightarrow \quad \tilde{y} = \frac{1}{3}\sin x.$$

И общее решение ЛНДУ имеет вид:

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x + \frac{\sin x}{3}.$$

Результаты, естественно, совпали; однако трудоемкость методов существенно разнится.

.

Пример 26 (к задачам 181-190). Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}$.

Решение. Для нахождения интервала сходимости степенного ряда воспользуемся признаком Даламбера:

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n 3^n}{3^{n+1}(x-3)^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{3} = \frac{1}{3}\cdot|x-3|.$$

Если $l<1$, то ряд сходится, если $l>1$, - ряд расходится, если $l=1$ – признак ответа не дает. Находим интервал сходимости:

$$l < 1 \Rightarrow \frac{1}{3}|x-3| < 1 \Rightarrow |x-3| < 3 \Rightarrow -3 < x-3 < 3 \Rightarrow 0 < x < 6.$$

Итак, на интервале (0;6) ряд сходится, вне этого интервала – расходится, а в точках $x = 0$ и $x = 6$ требуется дополнительное исследование.

а) Пусть $x = 0$, тогда степенной ряд становится числовым:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0-3)^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-....$$

Это знакочередующийся ряд, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{3}\neq 0$, следовательно, по признаку Лейбница ряд расходится.

б) Пусть $x = 6$, тогда получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+....$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\neq 0$, следовательно, по необходимому признаку ряд расходится.

Ответ. Интервал сходимости: $0<x<6$.

Пример 27 (к задачам 191-200). С точностью до 0,001 вычислить определенный интеграл разложением подынтегральной функции в ряд Маклорена: $\int\limits_0^{1/3} x\sin\sqrt{x}dx$.

Решение. Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $\sin x$:

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+....$ и заменим x на $\sqrt{x}$:

$$\sin\sqrt{x}=\sqrt{x}-\frac{(\sqrt{x})^3}{3!}+\frac{(\sqrt{x})^5}{5!}-\frac{(\sqrt{x})^7}{7!}+....$$

Как известно, степенной ряд можно почленно интегрировать, при этом радиус сходимости не меняется. Поэтому

$$\int\limits_0^{1/3} x\sin\sqrt{x}dx=\int\limits_0^{1/3} x\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{(\sqrt{x})^3}{3!}+\frac{(\sqrt{x})5}{5!}-\frac{(\sqrt{x})^7}{7!}+...\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/3}\left(x^{3/2}-\frac{1}{3!}x^{5/2}+\frac{1}{5!}x^{7/2}-\frac{1}{7!}x^{9/2}+...\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^{5/2}}{5/2}-\frac{1}{3!}\frac{x^{7/2}}{7/2}+\frac{1}{5!}\frac{x^{9/2}}{9/2}-...\right)\Bigg|_0^{1/3}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5/2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{7/2}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{9/2}-...=$$

$$=\frac{2}{5\cdot\sqrt{3^5}}-\frac{2}{3!\cdot 7\cdot\sqrt{3^7}}+\frac{2}{5!\cdot 9\cdot\sqrt{3^9}}-... .$$

Получили знакочередующийся ряд. Теорема Лейбница утверждает, что если для приближенного вычисления суммы ряда ограничиться несколькими первыми членами, то совершаемая при этом ошибка не превосходит (по абсолютной величине) первого из отброшенных членов. Вопрос теперь лишь в том, сколькими членами ряда достаточно ограничиться, чтобы обеспечить заданную точность.

Рассуждаем методом перебора. Если ограничиться лишь первым членом ряда, то ошибка не превзойдет числа $\dfrac{2}{3!\cdot 7\cdot\sqrt{3^7}}=\dfrac{2}{6\cdot 7\cdot 27\cdot\sqrt{3}}\approx 0{,}00102$. Это больше требуемого значения 0,001. Для первого и второго членов ряда ошибка будет значительно меньше 0,001.

Итак, с точностью до 0,001, получаем:

$$\int\limits_0^{1/3} x\sin\sqrt{x}dx\approx\frac{2}{5\cdot\sqrt{3^5}}-\frac{2}{3!\cdot 7\cdot\sqrt{3^7}}\approx 0{,}02498.$$

<u>Пример 28 (к задачам 191-200)</u> Найти три первых отличных от нуля члена разложения в ряд Тейлора решения задачи Коши $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{\ln x}{x}, y(1)=1$. Найти точное решение. Сравнить результаты на чертеже.

<u>Решение</u>. В данном примере нам требуется найти частное решение $y(x)$ данного дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям $y(1)=1$, приближенно, определив три первых (отличных от нуля) члена разложения этого решения в ряд Тейлора.

В соответствии с заданным начальным условием $y(1)=1$ запишем ряд Тейлора в окружности точки $x_0=1$, т.е. по степеням $(x-1)$:

$$y(x)=y(1)+y'(1)(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3+...$$

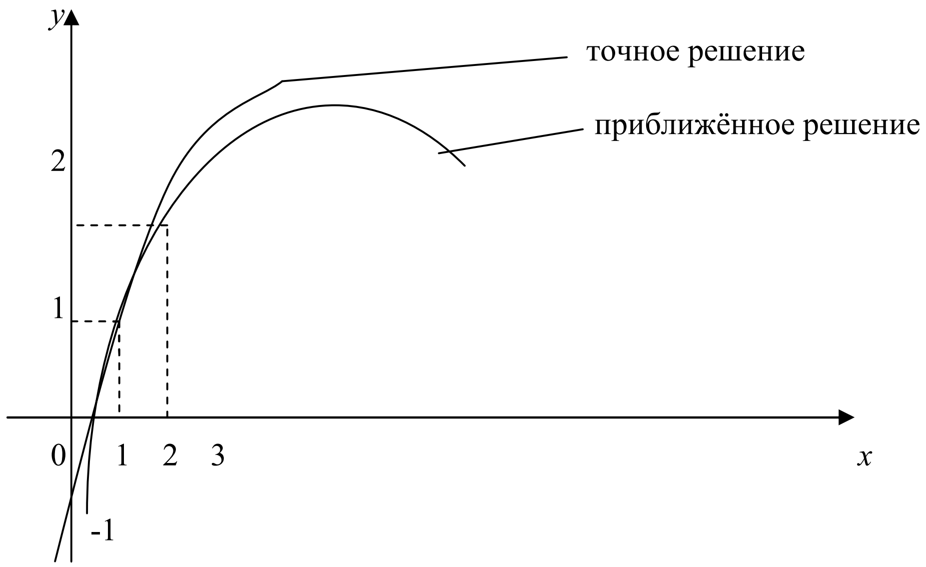
Коэффициенты разложения находим поочерёдно. Первый коэффициент есть начальное условие: $y(1)=1$. Второй коэффициент найдём из данного уравнения, переписав его в виде $y'=\dfrac{y-\ln x}{x}$, откуда $y'(1)=\dfrac{y(1)-\ln 1}{1}=1$, $y'(1)=1$. Следующие коэффициенты находим последовательным дифференцированием данного уравнения:

$$y''=\frac{(y'-1/x)x-(y-\ln x)}{x^2}=\frac{y'\cdot x-y+\ln x-1}{x^2}, y''(1)=\frac{1\cdot 1-1+\ln 1-1}{1}=-1$$

Итак, получили три первых отличных от нуля, члена разложения в ряд Тейлора решения задачи Коши: $y(x) \approx 1 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$.

В данном примере можно наглядно сравнить приближенное и точное решения. Уравнение является ЛНДУ I порядка. Решив его, получим частное решение, удовлетворяющее заданному условию: $y(x) = \ln x + 1$.

Точное и приближенное решения изображены на рисунке:



Пример №29 (к задачам 201-210). В результате опыта могут произойти три независимых события A_1,A_2, и A_3 с вероятностями $P(A_1) = 0{,}9$, $P(A_2) = 0{,}8$, $P(A_3) = 0{,}1$. Найти вероятности того, что в результате опыта: 1) произойдут все три события; 2) произойдет хотя бы одно событие; 3) произойдет ровно одно событие; 4) произойдет только первое событие.

Решение. 1) Обозначим событие B = (в результате опыта произойдут все три события). Иначе говоря, в результате опыта произойдет A_1 *и* A_2 *и* A_3. Можно себя контролировать: если произносили союз «и», то речь идет о произведении событий: $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Поскольку события независимые, то по теореме умножения вероятностей

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}072;$$

Таким образом, $P(B) = 0{,}072$.

2) Обозначим событие C = (в результате опыта произойдет хотя бы одно из событий A_1,A_2, A_3). Другими словами событие с означает, что в результате опыта произойдет *или* A_1 *или* A_2 *или* A_3. Поскольку произносится союз *или*, то это указывает на то, что события складываются: $C = A_1 + A_2 + A_3$. При этом необходимо учитывать, что здесь союз *или* произносится не совсем в обыденном употреблении, когда иногда применение союза или к A и B предполагает исключение

одного из другого. В теории вероятностей сумма двух событий $A+B$ означает: или A или B или оба. Поэтому теорема сложения вероятностей имеет вид:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B),$$

а для трех событий

$$P(A_1+A_2+A_3)=$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cdot A_2)-P(A_1\cdot A_3)-P(A_2\cdot A_3)+P(A_1\cdot A_2\cdot A_3).$$

Для нашего примера

$$P(C)=P(A_1+A_2+A_3)=$$
$$=0{,}9+0{,}8+0{,}1-0{,}9\cdot 0{,}8-0{,}9\cdot 0{,}1-0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1=0{,}982.$$

Как видим, формула получилась громоздкой. В таких случаях следует всегда иметь в виду нахождение противоположного события и его вероятности. Противоположным событием $\overline{C}$ для C является: $\overline{C}$=(в результате опыта не произойдет ни одно из событий A_1, A_2, A_3), т.е. $\overline{C}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$. Поскольку

$$P(\overline{C})=(1-0{,}9)\cdot(1-0{,}8)\cdot(1-0{,}1)=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}018,$$

то $P(C)=1-P(\overline{C})=1-0{,}018=0{,}982$ и видим, что тот же результат получен несколько проще.

3) Обозначим: D = (в результате опыта произойдет ровно одно событие), т.е. $D=A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$. В этой сумме все слагаемые попарно несовместные, за счет присутствия в каждом слагаемом противоположных событий. Поэтому

$$P(D)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9+$$
$$+0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}162+0{,}072+0{,}002=0{,}236.$$

4) Обозначим: E = (в результате опыта произойдет только событие A_1), т.е. $E=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, следовательно, $P(E)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}162$

Пример №30 (к задачам 211-220). В коробке лежат неотличимые по внешнему виду два игральных кубика: один правильный, а второй – неправильный, у которого шестерка выпадает с вероятностью 1/3, пятерка- с вероятностью 1/6, а остальные- с одинаковыми вероятностями. Из коробки наудачу берут и подбрасывают кубик. Какова вероятность того, что выпадет шестерка.

Решение. Это пример на применение формулы полной вероятности, когда исследуемое событие A происходит с одним из событий (гипотез) $H_1, H_2 \ldots$, H_n, т.е. опыт как разбивается на два этапа: сначала происходит одна из гипотез, а затем событие A. В нашем случае надо выбрать кубик, а затем подбросить его и ждать появится или нет шестерка. Поэтому обозначим гипотезы:

H_1 = (из коробки выбирается правильный кубик),

H_2 = (из коробки выбирается неправильный кубик).

Поскольку кубики неотличимы по внешнему виду, то $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$.

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2).\ H_1$$

Условные вероятности даны в задаче:

$P(A/H_1)$ – вероятность события А при условии, что событие (гипотеза) H_1 произошло, т.е. вероятность появиться шестерке, если выбран правильный кубик, равна $1/6$: $P(A/H_1) = 1/6$.

Аналогично, $P(A/H_2) = 1/3$. Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

Видим, что полная вероятность $P(A) = 1/4$ находится между условными вероятностями $P(A/H_1) = 1/6$ и $P(A/H_2) = 1/3$.

Пример 31 (к задачам 231-240). Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Составить ряд и функцию распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах. Вычислить математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность того, что при четырех выстрелах будет не менее двух попаданий. Показать графически.

Решение. Во-первых, обозначим случайную величину ξ=(число попаданий в цель при четырех выстрелах). Очевидно, СВ ξ может принимать следующие значения: 0,1,2,3,4. При вычислении соответствующих вероятностей ясно, что имеет место повторение опыта (один и тот же стрелок производит выстрел 4 раза), следовательно, должна применяться формула Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $P_n(m)$ - вероятность того, что в результате опытов событие (в нашей задаче – попадание в цель) появится равно m раз, p - вероятность события в одном опыте (в нашей задаче p=0,8), q – вероятность противоположного события;

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad 0! = 1.$$

Проводим вычисления

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = \frac{4!}{0!\cdot 4!}\cdot 1\cdot 0{,}2^4 = 0{,}0016;$$

$$P_4(1) = C_4^1 p^1 q^3 = \frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256;$$

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2 = 0{,}1536;$$

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2 = 0{,}4096;$$

$$P_4(2) = C_4^4 p^4 q^0 = \frac{4!}{4!\cdot 0!}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^0 = 0{,}4096.$$

Составим ряд распределения случайной величины (дискретной) ξ:

$\xi = x_i$	0	1	2	3	4
$p = p_i$	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Проверяем правильность вычисления

$\sum p_i = 0{,}0016 + 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096 = 1$

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины ξ называется вероятность $P(\xi < x)$, т.е. вероятность того, что СВ ξ примет значения, меньше x: $F(x) = P(\xi < x)$. Для дискретных СВ функция распределения является дискретной (т.е. разрывной) разрывы функция терпит в точках x_i. Действительно проводим вычисления для нашей задачи: если $x \le 0$, то событие ($\xi < x$) – невозможное $\varnothing$ и, следовательно, $F(x) = P(\xi < x) = P(\varnothing) = 0$.

Далее, пусть $0 < x \le 1$. Тогда $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 0) = 0{,}0016$.

Аналогично: пусть $1 < x \le 2$, тогда:

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 0 \text{ или } \xi = 0) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0{,}0016 + 0{,}0256 = 0{,}0272;$$

пусть $2 < x \le 3$, тогда:

$$F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0{,}0016 + 0{,}0256 + 0{,}1536 = 0{,}1808;$$

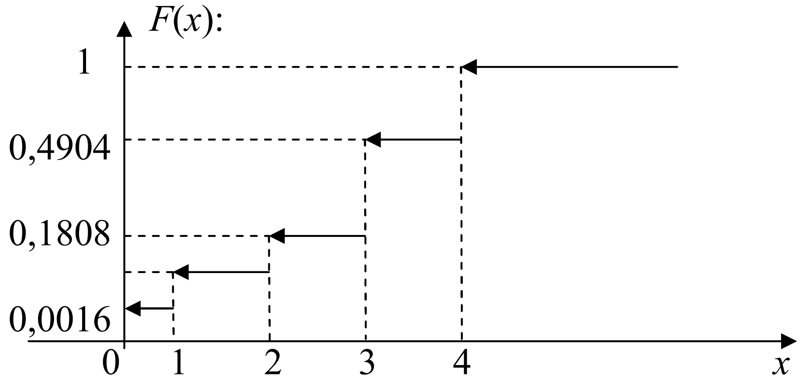
пусть $3 < x \le 4$, тогда:

$$F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0{,}1808 + 0{,}4096 = 0{,}5904;$$

и, наконец, пусть $x > 4$, тогда:

$$F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0{,}5904 + 0{,}4096 = 1.$$

Построим график функции $F(x)$:



Стрелки на графике означают, что функция в точках разрыва указанного стрелкой значения не достигает. Например, $P(3)$=0,1808 (но не 0,4904), а 0,4904 = $F(3+0)$.

Вычислим числовые характеристики (математическое ожидание m и дисперсию σ^2):

$$m = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0{,}0016 + 1 \cdot 0{,}0256 + 2 \cdot 0{,}1536 + 3 \cdot 0{,}4096 + 4 \cdot 0{,}4096 = 3{,}2016 .$$

Дисперсию σ^2 можно вычислить по определению $\sigma^2 = \sum (x_i - m)^2 \cdot p_i$, или по формуле $\sigma^2 = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum x_i{}^2 p_i - m^2$. По последней формуле имеем $\sigma^2 = 1 \cdot 0{,}0256 + 4 \cdot 0{,}1536 + 9 \cdot 0{,}4096 + 16 \cdot 0{,}4096 - (3{,}2016)^2 = 0{,}6298$.

Среднее квадратное отклонение $\sigma = 0{,}7936$.

Итак, мы имеем два вида закона распределения дискретной случайной величины (ДСВ) – ряд распределения и функцию распределения. Пользуясь этими законами, найдем вероятность $P(\xi \geq 2)$.

Во-первых, эту вероятность можно расписать следующим образом: $P(\xi \geq 2) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4)$ и, глядя на ряд распределения, получаем, что $P(\xi \geq 2) = 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096 = 0{,}9728$. Этот же результат можно получить, используя функцию распределения по формулам:

$P(\xi = a) = F(a+0) - F(a)$;

$P(a \leq \xi < \beta) = F(\beta) - F(a)$;

$P(a \leq \xi \leq \beta) = F(\beta + 0) - F(a)$;

$P(a < \xi < \beta) = F(\beta) - F(a+0)$;

$P(a < \xi \leq \beta) = F(\beta + 0) - F(a+0)$.

Теперь, выбирая нужную формулу и глядя на функцию распределения, получим $P(\xi \geq 2) = P(2 \leq \xi \leq 4) = F(4+0) - F(2) = 1 - 0{,}0272 = 0{,}9728$.

Пример 32 (к задачам 241-250). Имеются данные о выходе валовой продукции (в руб.) на 1 га сельскохозяйственных угодий для 50 хозяйств;

535	278	312	368	327	482	318	531	554	898	1030	390	
334	423	393	1081	493	698	312	603	372	454	379	294	
343	365	341	459	278	449	433	250	443	447	375	271	727
334	327	501	273	871	390	582	469	448	274	495	357	546

Требуется:

1. Построить вариационный ряд частот или относительных частот;
2. Изобразить геометрически вариационный ряд, построив гистограмму частот;
3. Вычислить точечные оценки параметров распределения;
4. Высказать гипотезу о виде закона распределения признака и применить критерий согласия хи-квадрат Пирсона на 5%-м уровне значимости;
5. Считая полученный набор данных генеральной совокупностью, сделать из этой совокупности выборку объема 10, для которой:

а) вычислить точечные оценки параметров распределения - выборочную среднюю арифметическую $\overline{x}(10)$ и исправленную выборочную дисперсию $\overline{S}(10)$, сравнить полученные значения с соответствующими характеристиками генеральной совокупности;

б) найти доверительный интервал для генеральной средней на уровне значимости a = 0,05 при неизвестной и известной дисперсии;

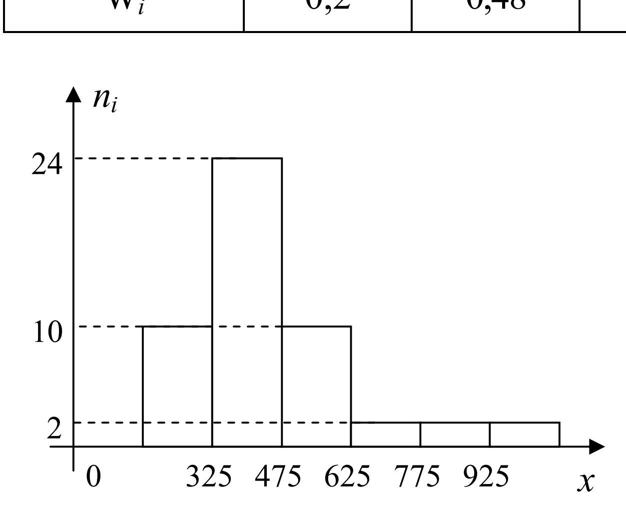
в) найти доверительный интервал для генеральной дисперсии.

<u>Решение.</u>

1) Изучается непрерывный признак X - выход валовой продукции (в руб.) на 1 га сельскохозяйственных угодий. Для непрерывного признака по результатам выборки составляется интервальный вариационный ряд. Для этого весь диапазон изменения признака X — размах вариации R = $x_{\max} - x_{\min}$, разобьем на несколько интервалов длины h. Обычно рекомендуется разбивать на 5-10 интервалов одинаковой длины. Вообще, для выбора такой длины h интервала, чтобы ряд распределения не был слишком громоздким и в то же время отражал характерные черты распределения, рекомендуется использовать формулу Стэрджеса: $h = R/(1 + 3{,}322 \cdot \lg n)$. При этом за правый конец первого интервала следует взять $(x_{\min} + h/2)$, а за левый конец последнего — $(x_{\max} - h/2)$. В нашей задаче R=1081-250=831 и по формуле Стэрджеса получаем $h = 831/(1 + 3{,}322 \cdot \lg 50) = 125{,}07$. Обычно значение h, вычисленное по формуле Стэрджеса, округляют до удобного для вычислений значения. Возьмем h = 150, а за правый конец первого интервала — $(x_{\min} + h/2) = 250 + 75 = 325$. Итак, получаем интервальный ряд частот и относительных частот.

Интервальный ряд частот и относительных частот валовой продукции (руб.) на 1 га с/х угодий.

Выход валовой продукции X (руб.)	Менее 325	325-475	475-625	625-775	775-925	Свыше 925
	-250-	-400-	-550-	-700-	-850-	-1000-
n_i	10	24	10	2	2	2
W_i	0,2	0,48	0,2	0,04	0,04	0,04



2) Графическим изображением вариационного ряда служит гистограмма частот или относительных частот. Построим гистограмму частот. Для этого на оси абсцисс откладываем отрезки, изображающие длины h интервалов изменения признака X. На этих отрезках как на основаниях строим прямоугольники с высотами, равными n_i

3) Для вычисления среднего арифметического и дисперсии признака его интервальный вариационный ряд преобразуют в дискретный, заменяя каждый интервал его срединным значением. В таблице соответствующие срединные значения каждого интервала записаны в первой строке таблицы. Теперь можно заняться вычислением числовых характеристик. Они вычисляются так же, как для дискретных рядов.

Выборочная средняя арифметическая:

$$\bar{x}(50) = 250\cdot 0{,}2 + 400\cdot 0{,}48 + 550\cdot 0{,}2 + 700\cdot 0{,}04 + 850\cdot 0{,}04 + 1000\cdot 0{,}04 = 454;$$

Выборочная дисперсия:

$$S^2(50) = \sum_{i=1}^{m} x_i{}^2 W_i - (\bar{x})^2 = 250^2\cdot 0{,}2 + 400^2\cdot 0{,}48 + 550^2\cdot 0{,}2 + 700^2\cdot 0{,}04 +$$

$$+ 850^2\cdot 0{,}04 + 1000^2\cdot 0{,}04 - 454^2 = 32184.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение: $S(50) = \sqrt{32184} \approx 179{,}4$;

Коэффициент вариации: $V = \dfrac{S(50)}{\bar{x}} = \dfrac{179{,}4}{454} = 0{,}395$ (39,5%).

Каждое из полученных значений числовых характеристик задаются одним числом (т.е. одной точкой на числовой прямой), поэтому они называются точечными оценками неизвестных параметров всей генеральной совокупности.

Всякое высказывание о генеральной совокупности, проверяемое по выборке, называется статистической гипотезой. Статистические гипотезы классифицируют на гипотезы о законах распределения и гипотезы о параметрах распределения. Критерии проверки статистических гипотез о законе распределения называются критериями согласия. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона — самый старый и самый распространенный .

4) Пусть в результате n наблюдений признака X получен вариационный ряд. Анализ выборки (например, по виду гистограммы частот - если в нашем примере через верхние основания прямоугольников гистограммы провести плавную линию, то она будет иметь колоколообразную форму, т.е. похожа на график плотности вероятности нормального распределения) приводит нас к предположению о некотором (например, нормальном) законе распределения признака X. Параметры этого распределения, если заранее не известны, оцениваются по выборочным данным и, таким образом, нам становится известным предполагаемый теоретический закон распределения. По этому закону легко определить вероятности p_i того, что признак примет значение, принадлежащее i-му интервалу. Отсюда для выборки объема n получаем теоретические частоты $n_i^0 = n\cdot p_i$ и сравниваем их с фактическими n_i. В качестве меры расхождения теоретического и эмпирического ряда частот берется случайная величина χ^2 (читается как хи-квадрат):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i{}^0\right)^2}{n_i{}^0},$$

которая оказывается распределенной по закону хи-квадрат.

Как уже говорилось, есть основание предполагать, что признак X в нашем примере распределен по нормальному закону. Итак, мы высказываем гипотезу о том, что признак X распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $a = \bar{x}(50) = 454$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = S(50) = 179{,}4$ (или дисперсией $\sigma^2 = S^2(50)^2$=32184).

Теоретические частоты n_i^0 находятся по формуле $n_i^0 = n \cdot p_i$ где n - объем выборки, p_i - вероятность попадания значений признака X в соответствующий интервал. Поскольку признак распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $\bar{x}(n)$ и дисперсией $S^2(n)$, то вероятность p_i определяется с помощью функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ по формуле

$$p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S}\right).$$

Отметим, что для вычисления вероятностей по этой формуле левый конец первого интервала следует брать равным $(-\infty)$, а правый конец последнего интервала равным $(+\infty)$. Значения функции Лапласа берем из таблицы. В условиях нашей задачи получаем:

$$p_1=\Phi\left(\frac{325-454}{179{,}4}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-454}{179{,}4}\right)=\Phi(-0{,}72)-\Phi(-\infty)=-\Phi(0{,}72)+\Phi(\infty)=$$

$$=\Phi(\infty)-\Phi(0{,}72)=0{,}5-0{,}2642=0{,}2358; \qquad n_1^0 = 50\cdot 0{,}2358=11{,}79.$$

$$p_2=\Phi\left(\frac{475-454}{179{,}4}\right)-\Phi\left(\frac{325-454}{179{,}4}\right)=\Phi(-0{,}12)-\Phi(-0{,}72)=\Phi(0{,}12)+\Phi(0{,}72)=$$

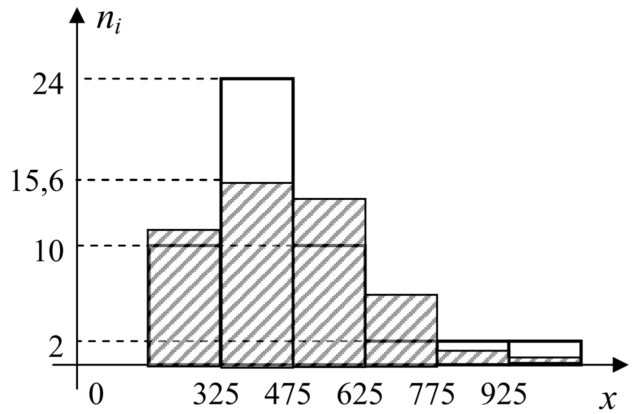
$$=0{,}0478+0{,}2642=0{,}312; \qquad n_2^0 = 15{,}6.$$

Продолжая аналогичные вычисления для остальных интервалов, найдем вероятности и соответствующие им теоретические частоты. Результаты вычислений приведены в следующей таблице.

Интервальный вариационный ряд фактических и теоретических частот и относительных частот выхода валовой продукции (руб.) на 1 га сельскохозяйственных угодий

X(руб.)	Менее 325	325-475	475-625	625-775	775-925	Свыше 925
n_i	10	24	10	2	2	2
W_i	0,2	0,48	0,2	0,04	0,04	0,04
n_i^0	11,79	15,6	14,05	6,72	1,62	0,22
p_i	0,2358	0,312	0,2809	0,134	0,0323	0,005

Теперь вновь построим гистограмму частот и на этом рисунке по результатам проведенных вычислений построим график теоретического нормального распределения, т.е. наряду с фактическими частотами построим и теоретические.



На рисунке получившаяся ступенчатая фигура заштрихована. Отчетливо видны расхождения между эмпирическим (выборочным) и теоретическим распределениями. Остается выяснить существенно ли на заданном уровне значимости a = 0,05 это расхождение. Ответ на этот вопрос и дает случайная величина χ^2. Число k степеней свободы этой случайной величины определяется соотношением $k = m - 3$, где m – число различных интервалов в вариационном ряду. Необходимо учесть следующее замечание: малочисленные частоты ($n_i < 5$) следует объединить. В этом случае ответствующие им теоретические частоты также надо сложить, а при определении числа степеней свободы по формуле $k = m - 3$ в качестве m принять число групп выборки, оставшихся после объединения частот.

В нашем примере объединим последние три интервала. В результате получим 4 интервала ($m = 4$):

n_i	10	24	10	6
n_i^0	11,79	5,6	14,05	8,56

Применяем формулу критерия хи-квадрат, учитывая, что число к степеней свободы критерия χ^2 равно $k = 4 - 3 = 1$:

$$\chi^2(1) = \sum \frac{(n_i - n_i^0)^2}{n_i^0} = \frac{(10-11{,}79)^2}{11{,}79} + \frac{(24-15{,}6)^2}{15{,}6} + \frac{(10-14{,}05)^2}{14{,}05} + \frac{(6-8{,}56)^2}{8{,}56} = 6{,}73.$$

Таким образом, получили фактическое значение критерия $\chi^2_{\text{факт}}$ = 6,73. По табл. распределения χ^2 для числа степеней свободы к=1 при уровне значимости a = 0,05 находим критическое значение критерия: $\chi^2_{\text{кр}}$ = 3,8. Итак, получаем, что фактическое значение критерия превысило критическое (6,73 > 3,8), поэтому на уровне значимости a = 0,05 гипотезу о том, что признак X распределен по нормальному закону, следует отвергнуть.

Следует заметить, что если бы критерий хи-квадрат Пирсона (или какой-нибудь другой) дал положительный результат ($\chi^2_{\text{факт}} < \chi^2_{\text{кр}}$), т.е. гипотезу о нормальном распределении следовало бы принять, то это не означало бы, что признак в действительности распределен по нормальному закону. Это означает лишь то, что выборочные данные на заданном уровне значимости (т.е. на заданном уровне надежности - в нашем примере с надежностью $p = 1 - a = 0{,}95 = 95\%$) не противоречат высказанной гипотезе. Более высокие требование к надежности выводов могут привести к отклонению гипотезы и принудят искать другие, более подходящие гипотезы.

5) В этом пункте, собственно, демонстрируется выборочный метод. При изучении признака, характеризующего некоторую совокупность однородных объектов, не всегда имеется возможность обследовать каждый объект изучаемой совокупности. Например, для выяснения среднего срока службы электрических лампочек, изготовляемых некоторым заводом, абсурдно проверять продолжительность горения каждой лампочки. Для выяснения некоторых качественных показателей всей совокупности (она называется генеральной совокупностью) исследованию подвергают лишь небольшую часть её, отобранную случайно. Эта часть называется выборочной совокупностью (или просто выборкой). Задача математической статистики состоит в изучении методов, позволяющих делать научно обоснованные выводы о характеристиках признака X генеральной совокупности по исследованию выборки из неё. Основным условием, которое предъявляется к выборке, для того, чтобы она наиболее достоверно отражала все существенные особенности генеральной совокупности, является случайность отбора. В зависимости от способа отбора различают выборки следующих типов: собственно случайные повторные, собственно случайные бесповторные, механические, типические, серийные и т.д.

Обозначим математическое ожидание и дисперсию признака X соответственно через a и σ^2. Значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$ естественно, будут меняться от выборки к выборке. Таким образом, каждое значение x_i считается не числом, а случайной величиной X_i , имеющей те же числовые характеристики a и σ^2, что и признак X. В этом заключается так называемая гипотетическая интерпретация выборочных данных (ГИВД). Всякую однозначно определенную функцию $\theta = f(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$ результатов наблюдения, с помощью которой судят о значении параметра θ называется оценкой (или статистикой) параметра θ. Так, например, состоятельной, несмещенной и, в случае нормального распределения признака X, эффективной оценкой генеральной средней является выборочная средняя. При больших значениях n ($n > 30$) в качестве оценки генеральной дисперсии σ^2 признака можно взять выборочную дисперсию

$$S^2(n) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i .$$

Каждая из оценок $\bar{x}(n)$ и $S^2(n)$ определяется одним числом, т.е. точкой на числовой прямой, и потому называются точечными оценками. Необходимо, однако, всегда помнить, что нахождение точечной оценки некоторого параметра - это лишь первый этап. Далее обязательно надо найти точность этой оценки или, как говорят, доверительный интервал. Интервал (θ_1, θ_2) называется доверительным интервалом для параметра θ, если с заранее заданной вероятностью $p = 1 - \alpha$ можно утверждать, что он содержит неизвестное значение параметра θ, т.е. $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = p = 1 - \alpha$

Вероятность $p = 1 - \alpha$ называется доверительной вероятностью или надежностью оценки и задается близкой к единице, обычно 0,9; 0,95 или 0,99. Число α называется уровнем значимости. Границы доверительного интервала находятся с помощью статистик, которые являются случайными величинами. Следовательно, случайны и границы интервала. Поэтому, говорят, что доверительный интервал накроет неизвестный параметр θ с доверительной вероятностью p.

В нашей задаче требуется найти доверительный интервал для неизвестного значения генеральной средней с надежностью 0,95. Как уже говорилось, оценкой генеральной средней является выборочная средняя $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} X_i$, которая, в соответствии с ГИВД, рассматривается как сумма независимых и одинаково распределенных случайных величин X_i. Если признак X распределен нормально с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, то доказано, что случайная величина $\overline{X}$ распределена тоже по нормальному закону - с тем же математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 / n. Тогда случайная величина $\frac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n}$ распределена нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единице, следовательно, вероятность того, что значения этой случайной величины по абсолютной величине не превзойдут числа Z_P, вычисляется по формуле

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n}\right| < Z_p\right) = 2\Phi(Z_p)$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2} dt$ находятся из таблиц. По условию задачи задана вероятность $p = 0{,}95$, следовательно, число находится из условия $2\Phi(Z_p) = 0{,}95$, $\Phi(Z_p) = 0{,}475$, значение $Z_p = 1{,}96$ находим по таблицам. Итак, с вероятностью $p = 0{,}95$ можно утверждать, что выполняется неравенство $\left(\left|\frac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n}\right| < Z_p\right)$.

Преобразуем это неравенство:

$$-Z_p < \left|\frac{\overline{X} - \alpha}{\sigma}\sqrt{n}\right| < Z_p \quad \Rightarrow \quad \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_p < a < \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_p,$$

откуда получаем доверительный интервал $\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_p ; \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_p\right)$ для неизвестного параметра a , следовательно, исходное условие можно переписать в виде:

$$P(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_p < a < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_p) = 2\Phi(Z_p) = p .$$

Отметим, что в эти формулы входит σ, следовательно, ими можно пользоваться лишь в случае, когда генеральная дисперсия известна (что на практике бывает не всегда).

Предположим сначала, что генеральная дисперсия нам известна и равна $\sigma^2 = S^2(50) = 32184$, а σ=179,4.

а) Выборка объема 10 включает следующие значения признака X:

535, 278,312, 368, 327, 482, 318, 531, 554,898.

Для этой малой выборки найдем выборочные числовые характеристики.

$$\bar{x}(10) = \frac{1}{10}(535 + 278 + 312 + 368 + 327 + 482 + 3\ 18 + 53\ 1 + 554 + 898) = 460{,}3;$$

$$S^2(10) = \overline{x^2}(10) - (\bar{x}(10))^2 ;$$

$$\overline{x^2}(10) = \frac{1}{10}\ (535^2 + 278^2 + 312^2 + 368^2 + 327^2 + 482^2 + 318^2 + 531^2 + 554^2 + 898^2) =$$

$$= 243193{,}5 \Rightarrow$$

$$S^2(10) = 243193{,}5 - 211876{,}1 = 31317{,}4,$$

$$\overline{S^2}(10) = \frac{10}{9} S^2(10) = 34797{,}1; \quad \overline{S}(10) = 186{,}5$$

Итак, выборочная средняя арифметическая $\bar{x}(10)$ = 460,3, исправленная выборочная дисперсия $\overline{S^2}(10) = 34797{,}1$ исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение $\overline{S}(10)$ = 186,5. Сравнив их с соответствующими показателями генеральной совокупности, отметим, что они отличаются в сторону увеличения: a = 454, σ^2=32184, σ= 179,4.

б) Итак, найдем по выше приведенным формулам доверительный интервал для неизвестного матожидания a при известной дисперсии σ^2=32184:

$$\bar{x}(10) - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{0,95} < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{0,95},$$

Подставляем значения:

$$460{,}3 - \frac{179{,}4}{\sqrt{10}} \cdot 1{,}96 < a < 460{,}3 + \frac{179{,}4}{\sqrt{10}} \cdot 1{,}96 ,$$

или

$$349{,}1 < a < 571{,}5.$$

Итак, доверительный интервал (349,1; 571,5) с надежностью 95% накроет неизвестное математическое ожидание a. Заметим, что истинное математическое ожидание $a = 454$ оказалось внутри доверительного интервала.

В действительности на практике чаще всего генеральная дисперсия σ^2 не известна и, следовательно, вышеприведенными формулами пользоваться нельзя, т.е. нельзя пользоваться статистикой $\frac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n}$.

В этом случае воспользуемся следующей теоремой: пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - независимые случайные величины, распределенные одинаково по нормальному закону с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Тогда случайная величина $t_{n-1} = \frac{\overline{X}(n) - a}{\overline{S}(n)}\sqrt{n}$ имеет распределение Стьюдента с n – 1 степенями свободы.

Доверительный интервал с помощью этой теоремы строится следующим образом. Пусть признак X распределен нормально с математическим ожиданием (генеральной средней) a и дисперсией (генеральной дисперсией) σ^2. В нашем распоряжении имеется малая выборка объема n = 10. Результаты наблюдений $x_{1;}\ldots,x_n$ в соответствии с ГИВД будем понимать как независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots X_n$, одинаково распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Тогда случайная величина $t_{n-1} = \frac{\overline{X}(n) - a}{\overline{S}(n)}\sqrt{n}$ распределена по закону Стьюдента с n – 1 степенями свободы. Если задана доверительная вероятность $p = 1 — \alpha$, то можно по таблицам t-распределения Стьюдента с n – 1 степенями свободы найти границы $\pm t_{n-1,p}$ интервала, для которого выполняется следующее условие:

$$P(-t_{n-1,p} < t_{n-1} < t_{n-1,p}) = p = 1 - a.$$

Расписав это условие подробнее, получим формулу для определения искомого доверительного интервала:

$$P(-t_{n-1,p} < \frac{\overline{X}(n) - a}{\overline{S}(n)}\sqrt{n} < t_{n-1,p}) = p,$$

$$P(\overline{X}(n) - \frac{\overline{S}(n)}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,p} < a < \overline{X}(n) + \frac{\overline{S}(n)}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,p}) = p.$$

Таким образом, с вероятностью p можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\overline{X}(n) - \frac{\overline{S}(n)}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,p}; \overline{X}(n) + \frac{\overline{S}(n)}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,p}\right)$ накроет неизвестную генеральную среднюю a.

Подставим в окончательную формулу данные нашедшего примера: $\overline{x}(10)$ = 460,3; $\overline{S}(10)$ = 186,5; n = 10; $p = 1 - \alpha$ = 0,95; $t_{9;0,95}$ = 2,262 (найдено по таблицам распределения Стьюдента). Получим

$$460{,}3-\frac{186{,}5}{\sqrt{10}}\cdot 2{,}262 < a < 460{,}3+\frac{186{,}5}{\sqrt{10}}\cdot 2{,}262$$

т.е.

$$326{,}9 < a < 593{,}7.$$

Итак, теперь мы утверждаем более слабое предложение: с надежностью 95% (или с вероятностью 0,95) интервал (326,9; 593,7) накроет неизвестное математическое ожидание a (генеральную среднюю).

Утверждение это действительно более слабое, т.к. доверительный интервал оказался шире, т.е. оценка оказалась грубее. Это естественная плата за потерю информации о генеральной дисперсии.

в) Для нахождения доверительного интервала для неизвестной дисперсии σ^2 проводят аналогичные рассуждения, используя ГИВД - гипотетическую интерпретацию выборочных данных. В результате для выборки объема n=10 доверительный интервал имеет вид $\left(\frac{(n-1)\cdot \overline{S}(10)}{\chi_2^2};\frac{(n-1)\cdot \overline{S}(10)}{\chi_1^2}\right)$, где χ_1^2 и χ_2^2 находят по таблицам распределения $\chi^2(k)$ из условий :

$$P\left(\chi^2(k)>\chi_1^2\right)=1-\frac{\alpha}{2}=0{,}975 \quad \text{и} \quad P\left(\chi^2(k)>\chi_2^2\right)=\frac{\alpha}{2}=0{,}025.$$

Учитывая, что число степеней свободы $k = n - 1 = 9$, находим по указанным таблицам $\chi_1^2=2{,}7$; $\chi_2^2=19{,}023$ и получаем доверительный интервал для неизвестной генеральной дисперсии

$$\left(\frac{9\cdot 186{,}5}{19{,}023};\frac{9\cdot 186{,}5}{2{,}7}\right)=(88{,}235;621{,}667).$$

Заметим, что истинное значение генеральной дисперсии σ^2=32184, и $\sigma=179{,}4$ оказалось внутри доверительного интервала.

Пример №33 (к задачам 251-260). В таблице приведены данные опыта по изучению действия соотношения $N:P_2O_5:K_2O$ при питании рассады томатов на урожай плодов (ц/га). Каждое соотношение испытывалось на четырех участках. Методом дисперсионного анализа изучить влияние соотношения на урожайность плодов. Установить существенность влияния фактора при уровне значимости 0,05.

Урожайность плодов томатов в зависимости от соотношения $N:P_2O_5:K_2O$ при питании рассады.

Соотношение $N:P_2O5:K_2O$ (уровни фактора F)	Повторности				
	1	2	3	4	Средние
1:1:1 (F_1)	454	470	430	500	463,5
1:2:1 (F_2)	502	550	490	507	512,25
1:2:2 (F_3)	601	670	550	607	607
2:1:1 (F_4)	407	412	475	402	424
2:2:1 (F_5)	418	470	460	412	440

Решение. Задачей дисперсионного анализа является изучение влияния одного или нескольких факторов на рассматриваемый признак. Факторами обычно называют внешние условия, влияющие на эксперимент. Если изучают влияние одного фактора F на результирующий признак X, то имеет место однофакторный анализ, которым нам необходимо научиться пользоваться. В условиях эксперимента фактор F может принимать различные значения, изменяться, или, как говорят, может варьировать на разных уровнях $F_1, F_2, \ldots, F_P$. Например, если требуется выяснить влияние удобрений на урожайность, то здесь результирующий признак X - урожайность, фактор F - удобрение, а уровни $F_1, F_2, \ldots, F_P$ фактора - виды удобрений. Для большей достоверности на практике проводятся несколько испытаний, т.е. как говорят, осуществляют повторности. Будем предполагать, что число наблюдений для каждого уровня одинаково и равно n. Тогда результаты наблюдений можно свести в таблицу.

Исходные данные дисперсионного анализа.

Уровни фактора F	Повторности					
	1	2	3	…….	n	Средние
F_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…….	x_{1n}	$\overline{x_1}$
F_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…….	x_{2n}	$\overline{x_2}$
…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….
F_p	x_{p1}	x_{p2}	x_{p3}	…….	x_{pn}	$\overline{x_p}$

Введем обозначения:

$$\overline{x_i} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}, i = 1,2,\ldots,p; \quad \bar{x} = \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\overline{x_i},$$

т.е. $\overline{x_i}$ - средняя арифметическая на i - м уровне фактора, $\overline{x}$ - общая средняя арифметическая всех $p \cdot n$ наблюдений.

Мы уже видели, что мерой вариации признака является сумма квадратов отклонений значений признака от средней. Можно доказать следующий результат: $\underbrace{\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}-\overline{x})^2}_{Q} = \underbrace{n\cdot\sum_{i=1}^{p}(\overline{x_i}-\overline{x})^2}_{Q_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}-\overline{x_i})^2}_{Q_2}$, т.е. $Q=Q_1+Q_2$.

Сумма Q называется полной суммой квадратов отклонений. Отдельных наблюдений от общей средней. Слагаемое Q_1 называется рассеиванием по факторам, оно характеризует отклонение средних для факторных уровней от общей средней. Слагаемое Q_2 называется остаточным рассеиванием и характеризует расхождение между наблюдениями i-го уровня, т.е. за счет неучтенных факторов. Таким образом, формула показывает, что общее рассеивание значений признака X, измеряемое суммой Q , складывается из двух компонент Q_1 и Q_2, характеризующих рассеивание под влиянием фактора F (Q_1) и остаточное рассеивание (Q_2) под влиянием неучтенных факторов.

С помощью Q, Q_1, Q_2 производится оценка общей, межгрупповой и внутригрупповой дисперсией:

$$\overline{S^2} = \frac{1}{pn-1}Q,\ \overline{S^2}_1 = \frac{1}{p-1}Q_1,\ \overline{S^2}_2 = \frac{1}{p(n-1)}Q_2,$$

Сравнивая дисперсию по факторам $\overline{S^2_1}$ с остаточной дисперсией $\overline{S^2_2}$, по величине их отношения судят, насколько рельефно проявляется влияние фактора - в этом сравнении и заключается основная идея дисперсионного анализа.

Сравнение осуществляется с помощью отношения

$F(k_1,k_2) = \overline{S^2_1}/\overline{S^2_2} = \frac{1}{p-1}Q_1 / \frac{1}{p(n-1)}Q_2$, которое является случайной величиной, имеющей F - распределение Фишера с $k_1 = p - 1$, $k_2 = p(n-1)$ степенями свободы. Критическое значение критерия на заданном уровне значимости находят по таблицам.

Теперь обратимся к нашему примеру.

В нашей задаче $p = 5$, $n = 4$, $pn = 20$. Вычисляем среднюю арифметическую по каждому уровню фактора F.

$$\overline{x_1} = \frac{1}{4}(454 + 470 + 430 + 500) = 463{,}5;\ \overline{x_2} = \frac{1}{4}(502 + 550 + 490 + 507) = 512{,}25;$$

$$\overline{x_3} = 607;\ \overline{x_4} = 424;\ \overline{x_5} = 440.$$

Общую среднюю $\overline{x}$ вычислим по формуле

$$\overline{x} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\overline{x_i} = \frac{1}{5}(463{,}5 + 512{,}25 + 607 + 424 + 440) = 489{,}35.$$

При вычислении факторной $\overline{S^2_1} = Q_1/(p-1)$ и остаточной $\overline{S^2_2} = Q_2/p(n-1)$ дисперсий рекомендуется пользоваться формулами, упрощающими вычисления:

$$Q_1 = n\cdot\sum_{i=1}^{p}\overline{x_i}^2 - np(\overline{x})^2;\quad Q_2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}x^2_{ik} - n\sum_{i=1}^{p}\overline{x_i}^2.$$

Подставляя данные задачи в формулы, получим:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} x^2{}_{ik} = 454^2 + 470^2 + 430^2 + 500^2 + 502^2 + 550^2 + 490^2 + 507^2 + 601^2 + 670^2 +$$
$$+550^2 + 607^2 + 407^2 + 412^2 + 475^2 + 402^2 + 41\,8^2 + 470^2 + 460^2 + 412^2 = 4894209;$$

$$n\cdot\sum_{i=1}^{p}\overline{x_i^{\,2}} = 4(463{,}5^2 + 5\,1\,2{,}25^2 + 607^2 + 424^2 + 440^2\,) = 4876229{,}2;$$

$$np(\bar{x})^2 = 4 \bullet 5 \bullet 489{,}35^2 = 4789268{,}4;$$

$$\overline{S^2{}_1} = 21740{,}2; \quad \overline{S^2{}_2} = 1198{,}65.$$

Теперь находим фактическое значение $F_{факт}$ критерия F по формуле для $F(k_1,k_2)$.

$F_{факт} = 21740{,}2/1\,198{,}65 = 18{,}4$. По таблицам F - распределения Фишера для $к_1 = p\ - 1 = 5 - 1 = 4;\ к_2 =\ p(-1) = 5\cdot 3 = 15$ степеней свободы при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим критическое значение критерия: $F_{кр}=3{,}08$. Оказалось $F_{факт} > F_{кр}$, следовательно, факторная и остаточная дисперсии отличаются значимо на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Иначе говоря, фактор F - соотношение $N:P_2O_5:K_2O$ существенно влияет на урожайность плодов. В частности, из таблицы видно, что наибольшую урожайность дает соотношение 1:2:2 (третий уровень фактора F).

В заключение приведем некоторые извлечения из таблиц распределения Фишера-Снедекора, которые потребуются при выполнении контрольных работ.

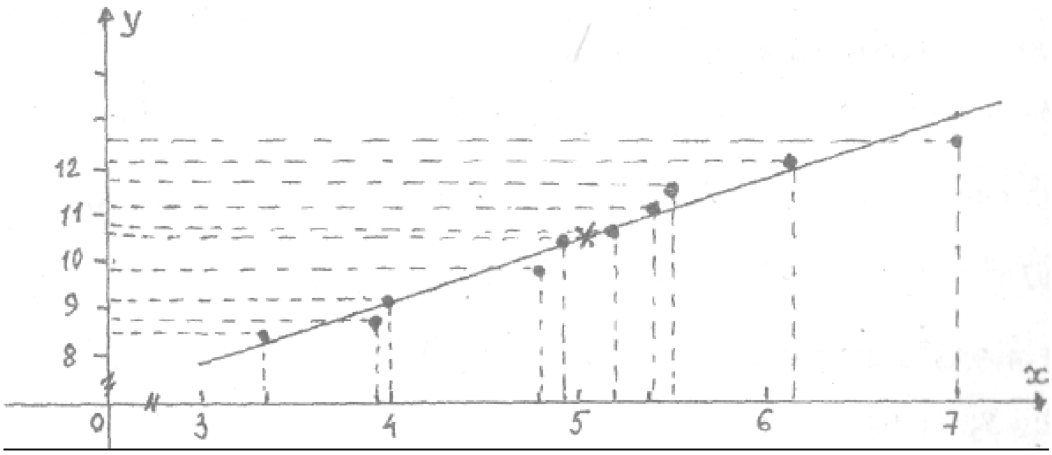
p	5	3	3	3	4
n	4	4	6	5	4
k_1	4	2	2	2	3
k_2	15	9	15	12	12
$F_{кр}$	3,08	4,9	3,7	3,9	3,5

Пример 34 (к задачам 261-270). Имеются статистические данные по группе предприятий о зависимости годовой производительности труда Y в расчете на одного рабочего (тыс. руб.) от энерговооруженности X (квт.ч. на одного рабочего) на 10 предприятиях одной отрасли:

X	3,4	3,9	4,0	4,8	4,9	5,2	5,4	5,5	6,2	7,0
Y	8,4	8,8	9,1	9,8	10,6	10,7	11,1	11,8	12,1	12,4

Методом корреляционного анализа исследовать зависимость между этими признаками. Рассчитать коэффициенты регрессии и корреляции. Построить график корреляционной зависимости.

Решение. Построим диаграмму рассеивания. Для этого на оси абсцисс откладываем значения x_i, факторного признака X, а на оси ординат - соответствующие значения y_i результирующего признака Y. Получающиеся таким образом точки с координатами $(x_i;y_i)$ образуют диаграмму рассеивания (см. рисунок).



Визуальные наблюдения позволяют высказать предположение о наличии линейном корреляционной зависимости, поскольку точки диаграммы рассеивания (иначе она называется корреляционным полем) как бы выстраиваются вдоль некоторой прямой линии. Итак, предполагаем, что между энерговооруженностью X (квт.ч. на 1 рабочего) и годовой производительностью труда Y (тыс. руб. на 1 рабочего) существует линейная корреляционная зависимость. Соответствующее уравнение прямой линии называется уравнением прямой регрессии Y на X и имеет вид:

$$y - \overline{y} = \rho(x - \overline{x}),$$

где коэффициент регрессии $\rho = r \cdot \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$,

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}\,; \qquad \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}\,;$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i\,; \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_i\,; \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x^2{}_i\,; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum y^2{}_i\,.$$

Выборочный коэффициент корреляции r определяется по формуле:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

в которой $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i$. Для качественной оценки тесноты корреляционной связи между X и Y с помощью коэффициента корреляции r можно использовать таблицу Чеддока:

Диапазон $\|r\|$	0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-0,99
Характеристика тесноты связи	Слабая	умеренная	заметная	высокая	Весьма высокая

Удобно все вычисления свести в таблицу

Итоговая таблица для нахождения уравнения регрессии.

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\,y_i$
	3,4	8,4	11,56	70,56	28,56
	3,9	8,8	15,21	77,44	34,32
	4,0	9,1	16,0	82,81	36,40
	4,8	9,8	23,04	96,04	37,04
	4,9	10,6	24,01	112,36	51,94
	5,2	10з7	27,04	1 14,49	55,64
	5,4	11,1	29,16	123,21	59,94
	5,5	11,8	30,25	139,24	64,90.
	6,2	12,1	38,44	146,41	75,02
	7,0	12,4	49,0	153,76	86,80
$\sum_1^n$	50,3	104,8	263,71	1116,32	540,56
$\frac{1}{ï}\sum_1^n$	$\bar{x}$=5,03	$\bar{y}$=10,48	$\overline{x^2}$ =26,371	$\overline{y^2}$ =111,632	$\overline{xy}$=54,056

Таким образом, $\bar{x}$=5,03, $\bar{y}$=10,48, $\overline{x^2}$ =26,371, $\overline{y^2}$ =111,632, $\overline{xy}$=54,056, откуда по приведенным формулам находим:

$$\sigma_x=1{,}034;\quad \sigma_y=1{,}342;\quad r=0{,}967;\quad p=1{,}255.$$

Значение коэффициента корреляции r = 0,967, близкое к единице, свидетельствует о наличии весьма высокой корреляционной связи исследуемых признаков (см. таблицу Чеддока).

Выборочное уравнение линейной регрессии y на x имеет вид $y-10{,}48=1{,}255(x-5{,}03)$, или y = 1,255x + 4,167. Построим эту прямую на диаграмме рассеивания (см. рис.).

Из уравнения ясно, что прямая проходит через точку с координатами $(\bar{x};\bar{y})$; на рис. эта точка обозначена звездочкой. Вторую точку получим, подставляя, например, x = 7 в уравнение регрессии. Получим y = 12,9. Через полученные две точки проводим прямую регрессии.

Приложения.

Таблица 1.

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф (x)*
0,00	0,0000	0,31	0,1217	0,62	0,2324	0,93	0,3238
0,01	0,0040	0,32	0,1255	0,63	0,2357	0,94	0,3264
0,02	0,0080	0,33	0,1293	0,64	0,2389	0,95	0,3289
0,03	0,0120	0,34	0,1331	0,65	0,2422	0,96	0,3315
0,04	0,0160	0,35	0,1368	0,66	0,2454	0,97	0,3340
0,05	0,0199	0,36	0,1406	0,67	0,2486	0,98	0,3365
0,06	0,0239	0,37	0,1443	0,68	0,2517	0,99	0,3389
0,07	0,0279	0,38	0,1480	0,69	0,2549	1,00	0,3413
0,08	0,0319	0,39	0,1517	0,70	0,2580	1,01	0,3438
0,09	0,0359	0,40	0,1554	0,71	0,2611	1,02	0,3461
0,10	0,0398	0,41	0,1591	0,72	0,2642	1,03	0,3485
0,11	0,0438	0,42	0,1628	0,73	0,2673	1,04	0,3508
0,12	0,0478	0,43	0,1664	0,74	0,2703	1,05	0,3531
0,13	0,0517	0,44	0,1700	0,75	0,2734	1,06	0,3554
0,14	0,0557	0,45	0,1736	0,76	0,2764	1,07	0,3577
0,15	0,0596	0,46	0,1772	0,77	0,2794	1,08	0,3599
0,16	0,0636	0,47	0,1808	0,78	0,2823	1,09	0,3621
0,17	0,0675	0,48	0,1844	0,79	0,2852	1,10	0,3643
0,18	0,0714	0,49	0,1879	0,80	0,2881	1,11	0,3665
0,19	0,0753	0,50	0,1915	0,81	0,2910	1,12	0,3686
0,20	0,0793	0,51	0,1950	0,82	0,2939	1,13	0,3708
0,21	0,0832	0,52	0,1985	0,83	0,2967	1,14	0,3729
0,22	0,0871	0,53	0,2019	0,84	0,2995	1,15	0,3749
0,23	0,0910	0,54	0,2054	0,85	0,3023	1,16	0,3770
0,24	0,0948	0,55	0,2088	0,86	0,3051	1,17	0,3790
0,25	0,0987	0,56	0,2123	0,87	0,3078	1,18	0,3810
0,26	0,1026	0,57	0,2157	0,88	0,3106	1,19	0,3830
0,27	0,1064	0,58	0,2190	0,89	0,3133	1,20	0,3849
0,28	0,1103	0,59	0,2224	0,90	0,3159	1,21	0,3869
0,29	0,1141	0,60	0,2257	0,91	0,3186	1,22	0,3883
0,30	0,1179	0,61	0,2291	0,92	0,3212	1,23	0,3907

Продолжение таблицы 1.

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф (x)
1,24	0,3925	1,58	0,4429	1,92	0,4726	2,52	0,4941
1,25	0,3944	1,59	0,4441	1,93	0,4732	2,54	0,4945
1,26	0,3962	1,60	0,4452	1,94	0,4738	2,56	0,4948
1,27	0,3980	1,61	0,4463	1,95	0,4744	2,58	0,4951
1,28	0,3997	1,62	0,4474	1,96	0,4750	2,60	0,4953
1,29	0,4015	1,63	0,4484	1,97	0,4756	2,62	0,4956
1,30	0,4032	1,64	0,4495	1,98	0,4761	2,64	0,4959
1,31	0,4049	1,65	0,4505	1,99	0,4767	2,66	0,4961
1,32	0,4066	1,66	0,4515	2,00	0,4772	2,68	0,4963
1,33	0,4082	1,67	0,4525	2,02	0,4783	2,70	0,4965
1,34	0,4099	1,68	0,4535	2,04	0,4793	2,72	0,4967
1,35	0,4115	1,69	0,4545	2,06	0,4803	2,74	0,4969
1,36	0,4131	1,70	0,4554	2,08	0,4812	2,76	0,4971
1,37	0,4147	1,71	0,4564	2,10	0,4821	2,78	0,4973
1,38	0,4162	1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,80	0,4974
1,39	0,4177	1,73	0,4582	2,14	0,4838	2,82	0,4976
1,40	0,4192	1,74	0,4591	2,16	0,4846	2,84	0,4977
1,41	0,4207	1,75	0,4599	2,18	0,4854	2,86	0,4979
1,42	0,4222	1,76	0,4608	2,20	0,4861	2,88	0,4980
1,43	0,4236	1,77	0,4616	2,22	0,4868	2,90	0,4981
1,44	0,4251	1,78	0,4625	2,24	0,4875	2,92	0,4982
1,45	0,4265	1,79	0,4633	2,26	0,4881	2,94	0,4984
1,46	0,4279	1,80	0,4641	2,28	0,4887	2,96	0,4985
1,47	0,4292	1,81	0,4649	2,30	0,4893	2,98	0,4986
1,48	0,4306	1,82	0,4656	2,32	0,4898	3,00	0,49865
1,49	0,4319	1,83	0,4664	2,34	0,4904	3,20	0,49931
1,50	0,4332	1,84	0,4671	2,36	0,4909	3,40	0,49966
1,51	0,4345	1,85	0,4678	2,38	0,4913	3,60	0,499841
1,52	0,4357	1,86	0,4686	2,40	0,4918	3,80	0,499928
1,53	0,4370	1,87	0,4693	2,42	0,4922	4,00	0,499968
1,54	0 4382	1,88	0,4690	2,44	0,4927	4,50	0,499997
1,55	0,4394	1,89	0,4706	2,46	0,4931	5,00	0,49999997
1,56	0,4406	1,90	0,4713	2,48	0,4934	∞	0,5
1,57	0,4418	1,91	0,4719	2,50	0,4938		

Таблица 2.

Распределение Пуассона $P_n(m)=\dfrac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}$

m – число появлений события в n независимых испытаниях,
$a = mp$ – среднее число появлений события в n испытаниях.

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494	0613
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0253
5	—	—	—	0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031
6	—	—	—	—	—	—	0001	0002	0003	0005
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0001

m \ a	1,1	1,2	1,3	1, 4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	3329	3012	2725	2466	2231	2019	1827	1653	1496	1353
1	3662	3614	3543	3452	3347	3230	3106	2975	2842	2707
2	2014	2169	2303	2417	2510	2584	2640	2678	2700	2707
3	0738	0867	0998	1128	1255	1378	1496	1607	1710	1805
4	0203	0260	0324	0395	0471	0551	0636	0723	0812	0902
5	0045	0063	0084	0111	0141	0176	0216	0260	0309	0361
6	0008	0013	0018	0026	0035	0047	0061	0078	0098	0120
7	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0015	0020	0027	0034
8	—	—	0001	0001	0001	0002	0003	0005	0006	0009
9	—	—	—	—	—	—	0001	0001	0001	0002

m \ a	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	1225	1108	1003	0903	0821	0743	0672	0608	0550	0498
1	2572	2438	2306	2177	2052	1931	1815	1703	1596	1494
2	2700	2681	2652	2613	2565	2510	2450	2384	2314	2240
3	1890	1964	2083	2090	2138	2176	2205	2225	2234	2240
4	0992	1087	1169	1254	1336	1414	1488	1557	1622	1680
5	0417	0476	0538	0602	0668	0735	0804	0872	0941	1008
6	0146	0175	0206	0241	0278	0319	0362	0407	0455	0504
7	0044	0055	0068	0083	0099	0118	0140	0163	0188	0216
8	0012	0015	0020	0025	0031	0039	0047	0057	0068	0081
9	0003	0004	0005	0007	0009	0011	0014	0018	0022	0027
10	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0008

Продолжение табл.2.

a / m	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
0	0302	0183	0111	0067	0025	0009	0003	0001	-	-
1	1057	0733	0500	0337	0149	0064	0027	0011	0005	0002
2	1850	1465	1125	0842	0446	0223	0107	0050	0023	0010
3	2158	1954	1687	1404	0892	0521	0286	0150	0076	0037
4	1888	1954	1898	1755	1339	0912	0573	0338	0189	0102
5	1327	1563	1708	1755	1606	1277	0916	0607	0378	0224
6	0771	1042	1281	1462	1606	1490	1221	0911	0631	0411
7	0386	0595	0824	1044	1377	1490	1396	1171	0901	0646
8	0169	0298	0463	0653	1033	1304	1396	1318	1126	0888
9	0066	0132	0232	0363	0688	1014	1241	1318	1251	1085
10	0023	0053	0104	0181	0413	0710	0993	1186	1251	1194
11	0007	0019	0043	0082	0225	0452	0722	0970	1137	1194
12	0002	0006	0016	0034	0113	0264	0481	0728	0948	1094
13	0001	0002	0006	0013	0052	0142	0296	0504	0729	0926
14	—	0001	0002	0005	0022	0071	0169	0324	0521	0728
15	—	—	0001	0002	0009	0033	0090	0194	0347	0533
16	—	—	—	—	0003	0014	0045	0109	0217	0367
17	—	—	—	—	0001	0006	0021	0058	0128	0237
18	—	—	—	—	—	0002	0009	0029	0071	0145
19	—	—	—	—	—	0001	0004	0014	0037	0084
20	—	—	—	—	—	—	0002	0006	0019	0046
21	—	—	—	—	—	—	0001	0003	0009	0024
22	—	—	—	—	—	—	—	0001	0004	0012
23	—	—	—	—	—	—	—	—	0002	0006
24	—	—	—	—	—	—	—	—	0001	0003
25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0001
26	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Примечание. В таблице даны значения вероятности $P_n(m)$ после запятой.

Таблица 3.

Критические точки распределения Стьюдента.

В таблице приведены значения $t_\gamma = t(\gamma, k)$ в зависимости от объема выборки n (числа степеней свободы $k = n - 1$) и надежности γ (уровня значимости α =1 - γ), для которых выполняется условие $\mathrm{P}[\,|t| < t_\gamma(k)] = \gamma$ (вероятность того, что случайная величина t по абсолютной величине меньше критического значения $t_\gamma(k)$ равна доверительной вероятности γ).

Надежность γ		**0,9**	**0,95**	**0,99**	**0,995**	**0,999**
Уровень значимости α		**0,1**	**0,05**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
Объем выборки n	Число степеней свободы k					
2	1	6,314	12,706	63,657	127,32	636,62
3	2	2,920	4,303	9,925	14,089	31,600
4	3	2,353	3,183	5,841	7,453	12,922
5	4	2,132	2,776	4,604	5,597	8,610
6	5	2,015	2,571	4,032	4,773	6,869
7	6	1,943	2,447	3,707	4,317	5,959
8	7	1,895	2,365	3,500	4,029	5,408
9	8	1,860	2,306	3,355	3,833	5,041
10	9	1,833	2,262	3,250	3,690	4,781
11	10	1,813	2,228	3,169	3,581	4,587
12	11	1,796	2,201	3,106	3,497	4,437
13	12	1,782	2,179	3,054	3,428	4,318
14	13	1,771	2,160	3,012	3,372	4,221
15	14	1,761	2,145	2,977	3,326	4,140
16	15	1,753	2,131	2,947	3,286	4,073
17	16	1,746	2,120	2,921	3,252	4,015
18	17	1,740	2,110	2,898	3,222	3,965
19	18	1,734	2,101	2,878	3,193	3,922
20	19	1,729	2,093	2,861	3,174	3,883
21	20	1,725	2,086	2,845	3,153	3,849
22	21	1,721	2,080	2,831	3,135	3,819
23	22	1,717	2,074	2,819	3,119	3,792
24	23	1,714	2,069	2,807	3,104	3,767
25	24	1,711	2,064	2.797	3,092	3,745
26	25	1,708	2,060	2,787	3,078	3,725
27	26	1,706	2,055	2,779	3,067	3,707
28	27	1,703	2,052	2,771	3,056	3,690
29	28	1,701	2,048	2,763	3,047	3,674
30	29	1,699	2,045	2,756	3,038	3,659

Таблица 4.

Критические точки распределения χ^2.

(для малых значений уровня значимости α).

В таблице приведены критические значения $\chi^2_{кр}(\alpha;k)$, для которых выполняется условие $P[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha;k)] = \alpha$ (вероятность того, что случайная величина χ^2 превысит значение $\chi^2_{кр}$ равна уровню значимости α).

Число степеней свободы k	Уровень значимости α							
	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83	12,12
2	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82	15,20
3	4,64	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27	17,73
4	5,99	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47	20,00
5	7,29	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51	22,10
6	8,56	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46	24,10
7	9,80	12,02	14,07	16,01	18,47	20,28	24,32	26,02
8	11,03	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12	27,87
9	12,24	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88	29,67
10	13,44	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59	31,42
11	14,63	17,27	19,67	21,92	24,72	26,76	31,26	33,14
12	15,81	18,55	21,03	33,34	26,22	28,30	32,91	34,82
13	16,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53	36,48
14	18,15	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12	38,11
15	19,31	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70	39,72
16	20,46	23,54	26,30	28,84	32,00	34,27	39,25	41,31
17	21,61	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,80	42,88
18	22,76	25,99	28,87	31,53	34,80	37,16	42,31	44,43
19	23,90	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82	45,97
20	25,04	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,31	47,50
21	26,17	29,61	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80	49,01
22	27,30	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27	50,51
23	28,43	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73	52,00
24	29,55	33,20	36,41	39,36	42,98	45,56	51,18	53,48
25	30,67	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62	54,95
26	31,79	35,56	38,88	41,92	45,64	48,29	54,05	56,41
27	32,91	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64	55,48	57,86
28	34,03	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89	59,30
29	35,14	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30	60,73
30	36,25	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70	62,16

Примерный список рекомендуемой литературы

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1984.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления.- М.:Наука, 1988.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. -М.: Наука, 1967.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. -М.: Наука, 1984.
5. Булдык Г.М. Теория вероятностей и математическая статистика. -Минск, Высшая школа, 1989.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей, Физматгиз, 1962.
7. Воеводин В.В. Численные методы алгебры.
8. Воробьев Н.Н. Теория рядов.
9. Высшая математика: Методические указания для самостоятельной работы студентов заочного факультета РСХИ /сост. Т.С. Белоусова, Н.И. Потлова, В.И. Сусойкин, Е.И. Троицкий, О.В. Балашова, С.Н. Панкрашкина /- Рязань: РСХИ, 1989. Часть I.
10. Высшая математика: Методические указания для самостоятельной работы студентов заочного факультета РСХИ /сост. Е.И. Троицкий, Т.С. Белоусова, С.Н. Панкрашкина/ - Рязань: РСХИ, 1992, часть II.
11. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.

10.Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1972.

11.Данко П.В., Попов А.Г., Кожевникова Т.Н. Высшая математика в упражнениях и задачах: в2ч. - М.: Высшая школа, 1986.

12. Давыдочкина С.В.. Основные понятия операционного исчисления и его приложения. /Для студентов технических специальностей сельскохозяйственных вузов. Рязань, РГСХА, 2004 г.

13. Давыдочкина С.В. Векторная алгебра. – РГСХА, 2002 г., 43 с.

14. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта (с основами статистической отработки результатов исследований) - М.: Агропромиздат, 1985.

13.Ефимов А.В., Золотарев А.В., Терпигорева В.М. Математический анализ (специальные разделы), часть II. М.: Высшая школа, 1980.

14.Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 1975.

15.Зайцев И.А. Высшая математика. - Высшая школа, 1991.

16.Кальницкий Л.А., Добротин О.А., Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики, «Высшая школа», 1976.

17.Квальвассер В.И., Фридман М.И. Теория поля. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1967.

18.Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Векторный анализ. - М.: Наука, 1978.
19.Лачуга Ю.Ф., Самсонов В.А., Дидманидзе О.Н. Прикладная математика. Нелинейное программирование в инженерных задачах. — М.: Колос, 2001.
20.Матвеев Н.М. 'Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. -М.: Высшая школа, 1967.
21.Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. - М.: Наука, 1977.
22.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М. : Наука, 1978, т. 1,2.
23.Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики / Пер. с англ.-М.: Финансы и статистика, 1982.
24.Пономарев К.К. Специальный курс высшей математики.
25.Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. - М.: Наука, 1973.
26.Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа.
27.Шипачев В.С. Высшая математика. М. «Высшая школа», 1985.